FICHE MATIERE

Unité d'enseignement : **Automatique 1**

ECUE n° 1 : **Signaux et Systèmes Linéaires**

Chapitre 2

Descriptions Mathématiques des Systèmes Physiques

Nombre d'heures/chapitre : 4h

Cours intégré

Système d'évaluation : **Continu**

OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT :

-Connaître les notions des signaux.

-Connaître les notions des systèmes et plus particulièrement les systèmes asservis : Système mono variable ou multi variable.

CONTENU THEORIQUE :

Dans ce chapitre on s'intéresse à la classification des systèmes qui se répartie entre système mono variable et multi variable

Nous présentant la description des systèmes continus linéaires invariants (SLCI), leurs représentations, aussi que les équations différentielles et leurs résolutions tout en se basant sur la transformée de Laplace et la résolution des fonctions de Transfert d'un système de premier ordre et second ordre.

Descriptions Mathématiques des Systèmes Physiques

1. Classification des systèmes :

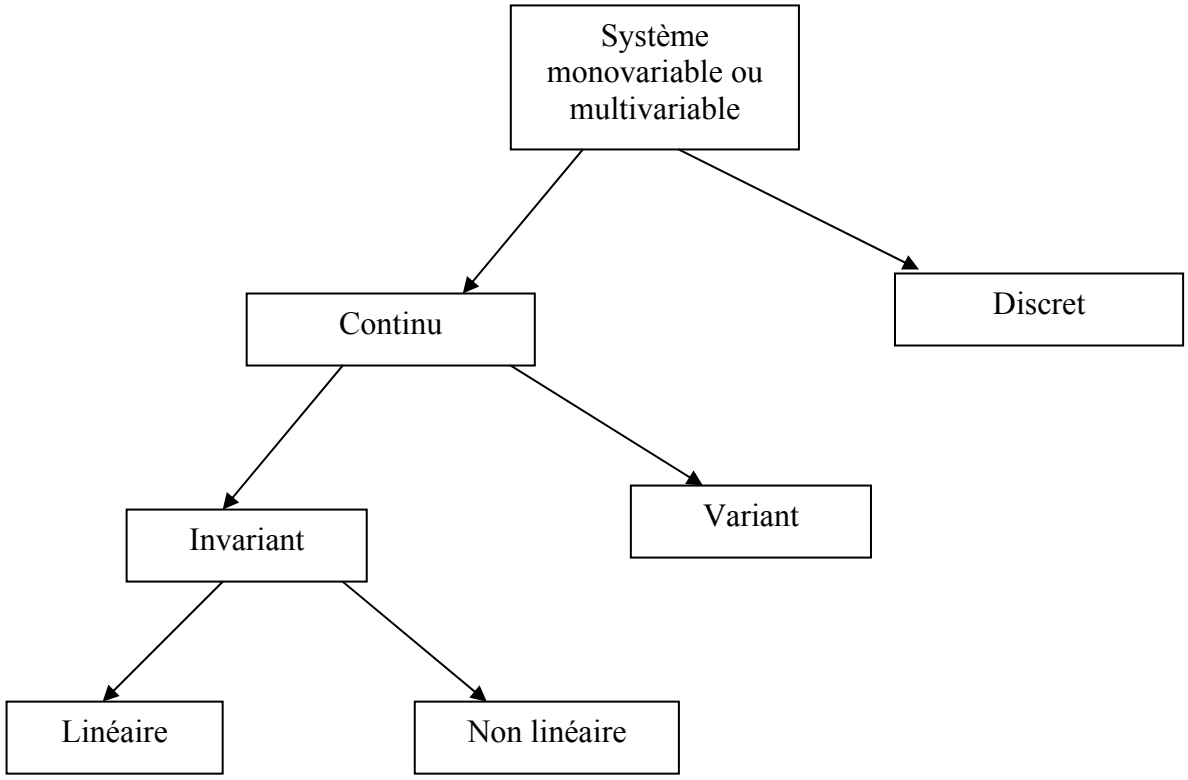

Fig. II.1 : Classifications des systèmes.

Les systèmes qui nous intéressent sont les systèmes continus linéaires invariants.

2. Description des systèmes continus linéaires invariants (SLCI) :

2.1. Définitions :

a) Système continu :

Un système est continu si les signaux d'entrées et de sorties sont des fonctions continues (Figure II.2) :

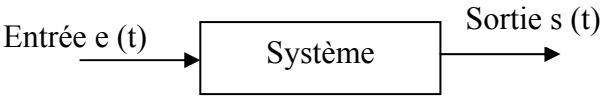

Fig. II.2

b) Système causal :

Un système est dit causal si le signal d'entrée est nul pour un intervalle de temps négatif.

c) Système invariant :

On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques de son comportement ne varient pas au cours du temps (Figure II.3).

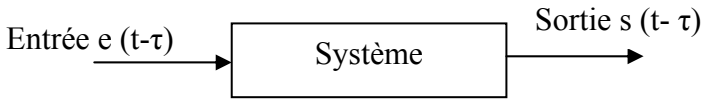

Fig. II.3

2.2. Systèmes linéaires :

*** Au sens mathématique :** $t \rightarrow f(t) \longrightarrow f(\lambda_1 t + \lambda_2 t) = \lambda_1 f(t) + \lambda_2 f(t)$

Linéarité mathématique :

- *Principe de superposition*

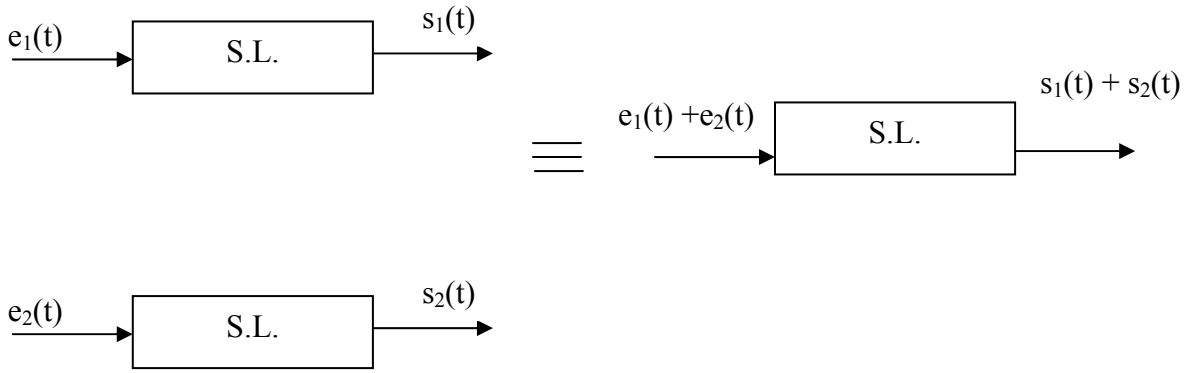

Fig. II.4 : Principe de superposition

- *Principe de proportionnalité*

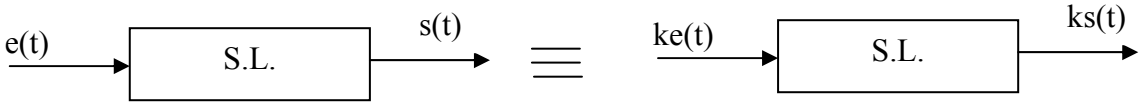

Fig. II.5 : Principe de proportionnalité.

*** Invariance temporelle :**

$$e(t-\tau) \rightarrow \quad S.L. \quad \rightarrow s(t-\tau)$$
$$e(t+\tau) \rightarrow \quad S.L. \quad \rightarrow s(t+\tau)$$

*** Au sens physique :**

Une fonction est linéaire au sens physique si elle est linéaire au sens mathématique, plus l'invariance temporelle.

Exemple : circuit R, L, C.

2.3. Représentation de SLCI :

On considère un système physique représenté par son schéma bloc. Ce système est linéaire lorsqu'il est décrit par une équation différentielle à coefficients constants.

$$a_0\, s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \ldots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0\, e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \ldots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

Pour les systèmes réels il faut que m<n

Exemples

1) circuit électrique :

$e(t) = Ri(t) + s(t)$

$e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$: Système linéaire (S.L.)

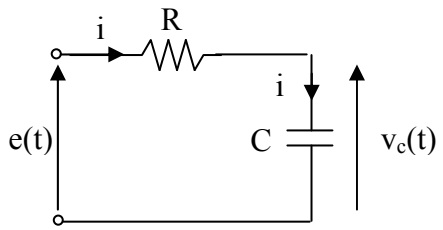

Fig. II.6: Circuit RC

2) système mécanique

$F_e = Kx + M\frac{dx}{dt} + f\frac{d^2x}{dt^2}$: Système linéaire (S.L.)

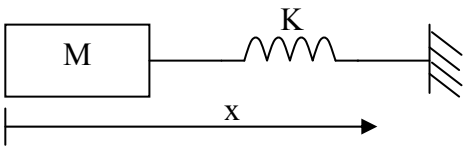

Fig. II.7: Système mécanique.

3) système électromécanique :

$C_M = C_r + f\frac{d\theta}{dt} + J\frac{d^2\theta}{dt^2}$

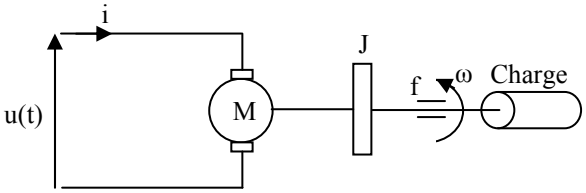

Fig. II.7: Système électromécanique.

3. Résolution des équations différentielles

Pour résoudre une équation différentielle on utilise :

- **Méthode classique**

Equation différentielle :

- ✓ Equation différentielle sans second membre : réponse équation libre $s_1(t)$
- ✓ Solution particulière : réponse forcée $s_2(t)$

$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.

Solution homogène : On pose e(t) = 0, on pose aussi $\frac{de(t)}{dt}=0$

Solution particulière : on pose s(t) de la même manière que e(t).

- **Méthode de la transformée de Laplace**

Cette méthode est la plus simple et la plus utilisée.

4. Transformée de Laplace :

4.1. Définition

La transformée de Laplace de la fonction f(t) telle que f(t) = 0 pour t<0 est :

$$TL[f(t)]= F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Cette transformation permet de passer du domaine temporel au domaine de Laplace.

4.2. Propriétés et théorèmes :

Propriétés et théorèmes	
Théorème de la valeur initiale	$\lim_{t\to 0^+} f(t)= \lim_{p\to\infty} pF(p)= f(0^+)$
Théorème de la valeur finale	$\lim_{t\to +\infty} f(t)= \lim_{p\to 0} pF(p)= f(+\infty)$
Théorème du retard temporel	$TL[f(t-\tau)] = e^{-p\tau}F(p)$
Théorème de l'avance	$TL[e^{-\infty t} f(t)] = F(p+\infty)$
Linéarité	$TL[a_1 f_1 + a_2 f_2] = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$
Dérivation	$TL[f^n(t)] = p^n F(p) - p^{(n-1)} f(0^+) - p^{(n-2)} f^1(0^+) - \ldots - f^{n-1}(0^+)$
Sans conditions initiales	$TL[f^n(t)] = p^n F(p)$
L'intégration	$TL\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$

Tab.2.1

Exemple : Circuit RC (voir figure 2.6)

$e(t) = Ri(t) + s(t)$

$$e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

$$E(p) = RC\,p\,S(p) + S(p)$$

$$E(p) = (RC\,p + 1)S(p)$$

→ Application :

Donner :

- équation différentielle,
- entrée temporelle,
- condition initiale nulle

*** Objectif :**

Recherche de la réponse temporelle du système.

*** Démarche :**

- calcul de la fonction de transfert H(p)
- calcul de l'entrée dans le domaine de Laplace E(p)
- calcul de la sortie dans le domaine de Laplace Y(p)
- calcul de la sortie temporelle en appliquant la transformée de Laplace inverse y(t)

5. Fonction de Transfert

5.1. Définition

Soit le système décrit par l'équation différentielle suivante :

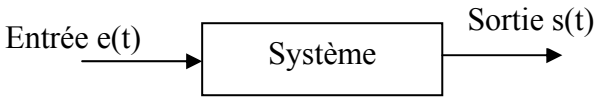

Fig.2.9

$$a_n\frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots + a_2\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1\frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m\frac{d^m s(t)}{dt^m} + \ldots + b_2\frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

La transformée de Laplace (si les conditions initiales sont nulles)

$$a_n p^n S(p) + \ldots + a_2 p^2 S(p) + a_1 pS(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \ldots + b_2 p^2 E(p) + b_1 pE(p) + b_0 E(p)$$

$$(a_n p^n + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0)S(p) = (b_m p^m + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0)E(p)$$

$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = H(p)}$$

L'équation de transfert est dite aussi équation d'isomorphe qui est définit par le quotient des grandeurs de sortie et d'entrée :

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_m p^m+...+b_2 p^2+b_1 p+b_0}{a_n p^n+...+a_2 p^2+a_1 p+a_0}$$

Remarque : La fonction de transfert caractérise la dynamique du système. Dans un système physique réel le degré de D(p), n, est supérieur au degré de N(p), m.

5.2. Equation caractéristique :

$$D(p)=a_n p^n+...+a_2 p^2+a_1 p+a_0$$

- Les solutions de l'équation caractéristique D(p) = 0 sont appelées les **racines** ou les **pôles** du système.
- Les solutions de l'équation N(p) = 0 sont appelées les **zéros** du système.

$$* \quad D(p)=0 \Leftrightarrow a_n p^n+...+a_2 p^2+a_1 p+a_0=0$$
$$\Leftrightarrow (p-p_n)(p-p_{n-1})...(p-p_0)=0$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i=0}^{n}(p-p_i)=0$$

$$* \quad N(p)=0 \Leftrightarrow b_m p^m+...+b_2 p^2+b_1 p+b_0=0$$
$$\Leftrightarrow (p-z_m)(p-z_{m-1})...(p-z_0)=0$$
$$\Leftrightarrow \prod_{j=0}^{m}(p-z_j)=0$$

$$\Rightarrow \quad H(p)=\frac{\prod_{j=0}^{m}(p-z_j)=0}{\prod_{i=0}^{n}(p-p_i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\prod_{j=0}^{m}(p-z_j)}{\prod_{i=0}^{n}(p-p_i)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S(p)=\frac{\prod_{j=0}^{m}(p-z_j)}{\prod_{i=0}^{n}(p-p_i)}E(p)}$$

Remarques

- Les « p_i » peuvent être des réels ou des complexes ;
- Si les « p_i » sont réels différents $\Rightarrow s(t)=\sum_{i=0}^{n}C_i e^{p_i t} \Rightarrow \lim_{\rightarrow} s(t)=\lim_{\rightarrow}\sum_{i=0}^{n}C_i e^{p_i t}$
  - Si les $p_i<0 \Rightarrow s(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow +\infty$: système **stable**.
  - Si les $p_i>0 \Rightarrow s(t) \rightarrow +\infty$ si $t \rightarrow +\infty$: système **instable**.

5.3. Théorème

Un système est dit stable si les parties réelles de ces pôles sont à partie réelle négatives.

5.4. Equation caractéristique d'un système de premier ordre :

Un système est dit de 1er ordre s'il est décrit par une équation différentielle de type :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = ke(t) \Rightarrow \tau pY(p) + Y(p) = kE(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1+\tau p}}$$

K : gain statique

τ: constante du temps.

5.5. Equation caractéristique d'un système de second ordre :

Un système est dit de second ordre s'il est décrit par une équation différentielle de second ordre.

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = k\omega_0^2 e(t)$$

k : gain statique $k = s(\infty)/e(\infty)$

m : coefficient d'amortissement

ω_0 : pulsation propre (naturelle).

$$\mathrm{p}^2 S(p) + 2m\omega_0 \mathrm{p} S(p) + \omega_0^2 S(p) = k\omega_0^2 \mathrm{E}(p) \quad \Rightarrow \quad \frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{H(p)} = \frac{k\omega_0^2}{\mathrm{p}^2 + 2m\omega_0 \mathrm{p} + \omega_0^2}}$$