

Chapitre 5 :

Etude des signaux déterministe à temps discret

I . Introduction

Le traitement numérique de l'information apporte de nombreux avantages techniques ainsi qu'une flexibilité accrue dans beaucoup de domaines. Le traitement du signal par transformée de Fourier pose cependant un certain nombre de problèmes. En effet un ordinateur ne peut traiter que des signaux numériques, ceux-ci sont obtenus après un *échantillonnage* et une *quantification*. Leur étude devra tenir compte des effets induits sur le spectre par ces deux techniques.

De plus, un calcul de transformée de Fourier est une somme d'une infinité d'échantillons. Le temps nécessaire ainsi que la mémoire de l'ordinateur vont forcément emmener certaines contraintes à ce niveau.

II . Les signaux discrets

II . 1. Définition

Soit un signal $x_e(t)$ échantillonné à une période d'échantillonnage T_e .

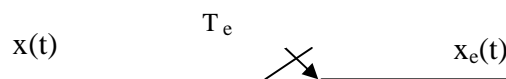


Figure (5 .1) : Signal échantillonné.

Le signal échantillonné s'écrit :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT_e) \cdot \delta(t - n \cdot T_e)$$

On obtient la suite de valeurs $\{x(n T_e)\}$ appelée signal discret.

On fait à ce signal échantillonné correspond un signal discret :

$$x_e(t) \rightarrow x[n]$$

➤ Cas général :

$$\{x[n]\} = \begin{cases} \{x[N], x[N+1], \dots, x[M]\} & , N \leq M \\ \text{longueur: } l = M - N + 1 \end{cases}$$

Exemple :

Soit le signal discret suivant :

$$\{x[n]\} = \{x[-1], x[0], x[1], x[2], x[3], x[4]\} = \{1, 2, -1, 3, 1, 2\}$$

1. Déterminer la longueur de ce signal ;
2. Ecrire $x[n]$ en fonction de $\delta[n]$;
3. Représenter le signal $x[n]$.

➤ Réponse

1. La longueur de ce signal est : $l = 4 - (-1) + 1 = 6$.
2. $x[n] = 1.\delta[n + 1] + 2.\delta[n] - 1.\delta[n - 1] + 3.\delta[n-2] + 1.\delta[n - 3] + 2.\delta[n - 4]$
- 3.

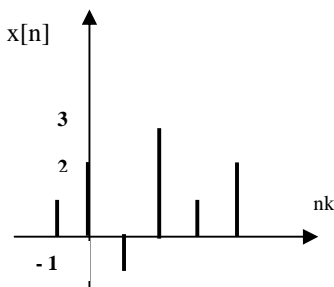


Figure (5 .2) : Représentation du signal discret $x[n]$.

II.2. Signaux discrets particuliers

II .2 .1. Echelon unité

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$$

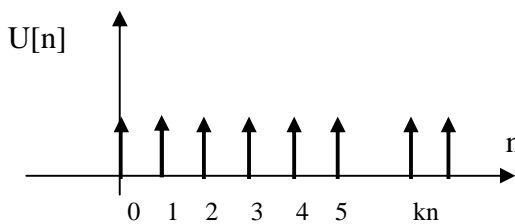


Figure (5 .3) : Représentation de l'Echelon unité

II.2.2. Impulsion discrète

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$$

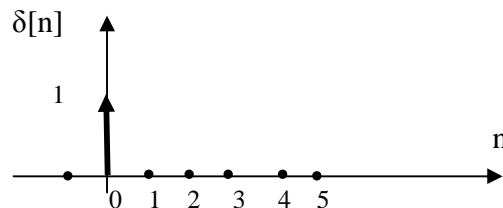


Figure (5 .3) : Représentation de $\delta[n]$.

II.2.3. Signal rectangulaire

❖ Soit le signal rectangulaire suivant :

$$\Pi_T(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -T \leq n \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le signal est de longueur $2T + 1$ et d'amplitude $A = 1$.

Signal rectangulaire en fonction d'échelon unitaire est :

$$\Pi_{2T}(n) = U(n + T) - U(n - (T + 1))$$

❖ Pour $T = 2$

$$\Pi_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

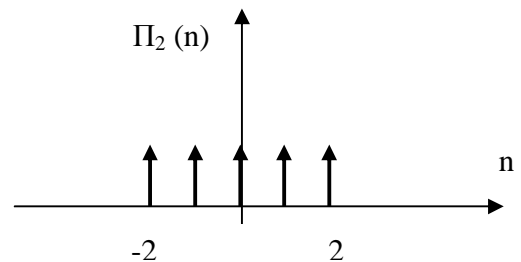


Figure (5.3) : Représentation du signal rectangulaire .

✓ Signal rectangulaire en fonction d'échelon unitaire est :

$$\Pi_{2T}(n) = U(n + 2) - U(n - 3)$$

✓ Signal rectangulaire en fonction d'impulsion de Dirac est :

$$\Pi_{2T}(n) = \delta(n + 2) + \delta(n + 1) + \delta(n) + \delta(n - 1) + \delta(n - 2)$$

III. Opération de base sur les signaux discrets

Soit les signaux discrets $x_1[n]$, $x_2[n]$ et $y[n]$

III.1. Addition

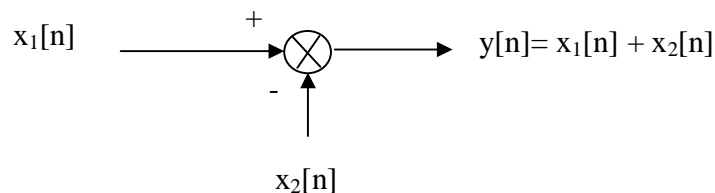


Figure (5.4) : Addition des signaux discrets.

III.2. Multiplication

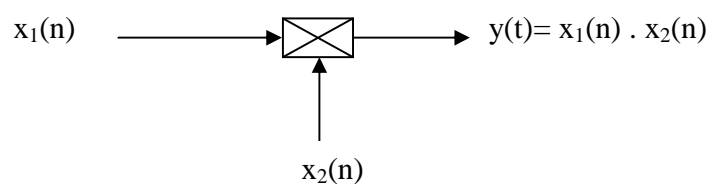


Figure (5.5) : Multiplication des signaux discrets.

IV. Produit de convolution des signaux discrets

IV. 1. Définition

Le calcul du produit de convolution de deux signaux discrets est donné par l'équation suivante :

$$y[n] = f_1[n] * f_2[n] = \sum_{\text{tous les } p} f_1[p] \cdot f_2[n - p]$$

IV. 2. Propriétés de la convolution

.1. La commutativité

$$f_1[k] * f_2[k] = f_2[k] * f_1[k]$$

.2. La distributivité

$$(f_1[k] + f_2[k]) * f_3[k] = f_1[k] * f_3[k] + f_2[k] * f_3[k]$$

.3. L'associativité

$$f_1[k] * f_2[k] * f_3[k] = f_1[k] * (f_2[k] * f_3[k]) = (f_1[k] * f_2[k]) * f_3[k]$$

.4. L'élément neutre

L'élément neutre du produit de convolution est l'impulsion de Dirac discrète ($\delta[n]$)

$$\delta[n] * f[n] = f[n]$$

$$f[n] * \delta[n - n_0] = f[n - n_0]$$

IV. 3. Calcul du produit de convolution de signaux discrets

➤ Exemple

On considère deux séquences discrètes aperiodiques non-nul sur les intervalles de durée N_{f_1} et N_{f_2} . Soit $f_1[n]$ séquence non nul pour $n \in [0, 3]$ et $f_2[n]$ séquence non nul pour $n \in [0, 3]$

$$f_1[k] = 1 \cdot \delta[k] + 2 \cdot \delta[k-1] + 3 \cdot \delta[k-2] + 4 \cdot \delta[k-3]$$

$$f_2[k] = 9 \cdot \delta[k] + 7 \cdot \delta[k-1] + 4 \cdot \delta[k-2] + 1 \cdot \delta[k-3]$$

- Déterminer le produit de convolution de $f_1(n)$ et de $f_2(n)$ par Calcul et par méthode graphique ;
- Représenter le produit de convolution.

➤ Correction : Soient la représentation des signaux discrets:

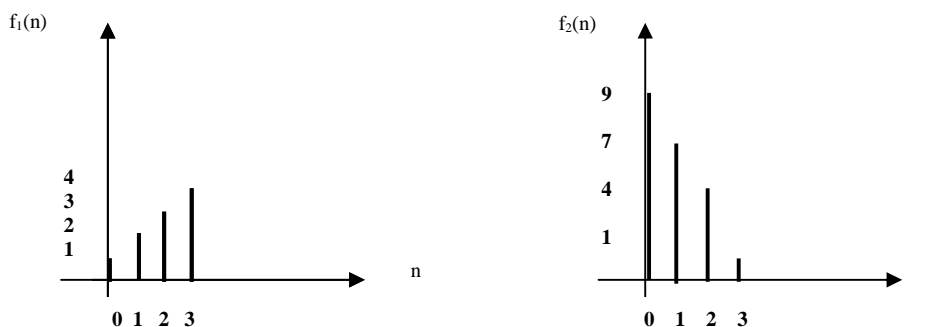


Figure (5.6) : les deux signaux discrets $f_1(n)$ et $f_2(n)$.

✓ **Calcul du produit de convolution par la méthode théorique :**

*Nombre d'impulsion N_y de $y[n]$:

$$N_y = N_{f1} + N_{f2} - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$$

*Calcul des valeurs de n de y :

$$n \geq 0 + 0 = 0$$

$$n \leq 3 + 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq n \leq 6$$

D'où

$$y[n] = \sum_{p=0}^{p=3} f_1[p] \cdot f_2[n-p] \quad \text{avec} \quad 0 \leq n \leq 6$$

-pour $n=0$ $y[0] = f_1(0) \cdot f_2(0) = 1 \cdot 9 = 9$

-pour $n=1$ $y[1] = f_1(0) \cdot f_2(1) + f_1(1) \cdot f_2(0) = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 = 25$

-pour $n=2$ $y[2] = f_1(0) \cdot f_2(2) + f_1(1) \cdot f_2(1) + f_1(2) \cdot f_2(0) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 45$

-pour $n=3$ $y[3] = f_1(1) \cdot f_2(3) + f_1(2) \cdot f_2(2) + f_1(3) \cdot f_2(1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 66$

-pour $n=4$ $y[4] = f_1(0) \cdot f_2(3) + f_1(1) \cdot f_2(2) + f_1(2) \cdot f_2(1) + f_1(3) \cdot f_2(0) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 42$

-pour $n=5$ $y[5] = f_1(2) \cdot f_2(3) + f_1(3) \cdot f_2(2) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 19$

-pour $n=6$ $y[6] = f_1(3) \cdot f_2(3) = 4 \cdot 1 = 4$

D'où le résultat suivant :

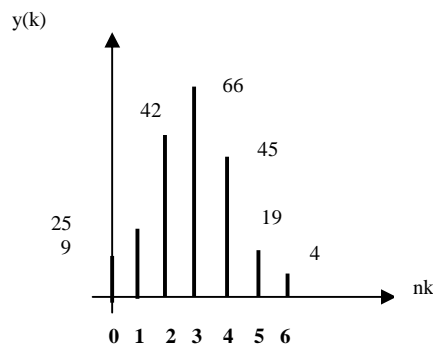
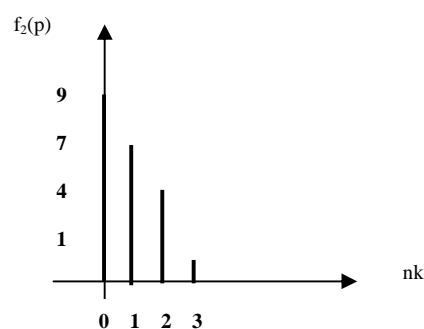
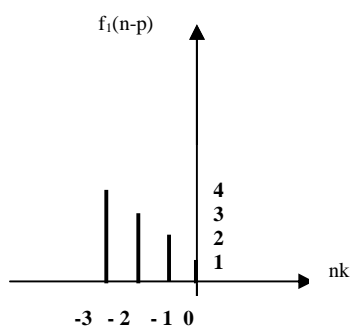
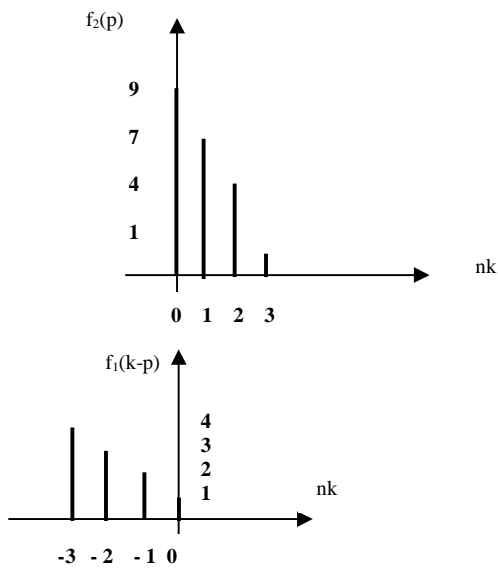


Figure (5.7) : le produit de convolution des signaux discret $f_1(n)$ et $f_2(n)$.

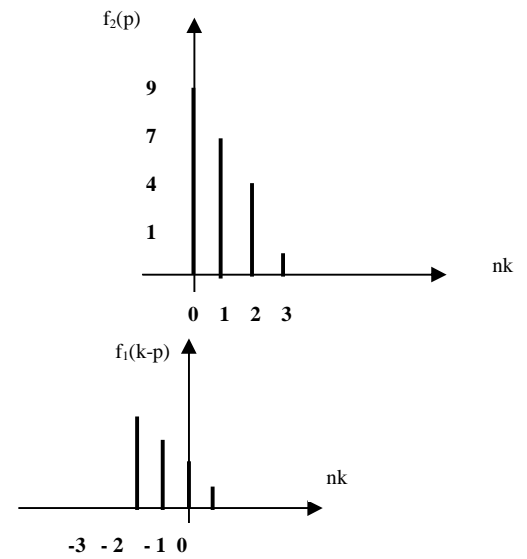
✓ **Calcul du produit de convolution par la méthode graphique :**



1^{er} cas : pour n = 0

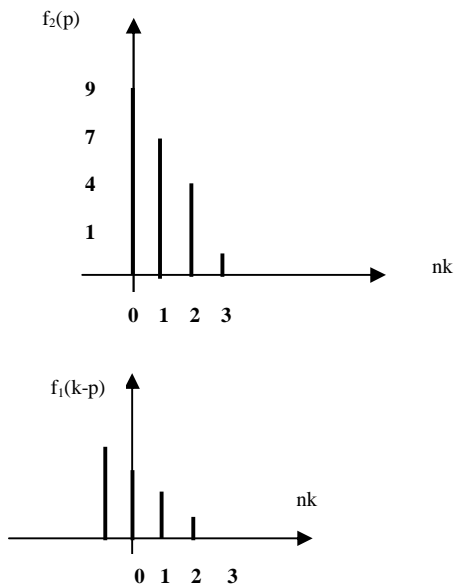
$$y(0) = 9.1 = 9$$

D'où $y(0) = 9$

2^{ème} cas : pour n = 1

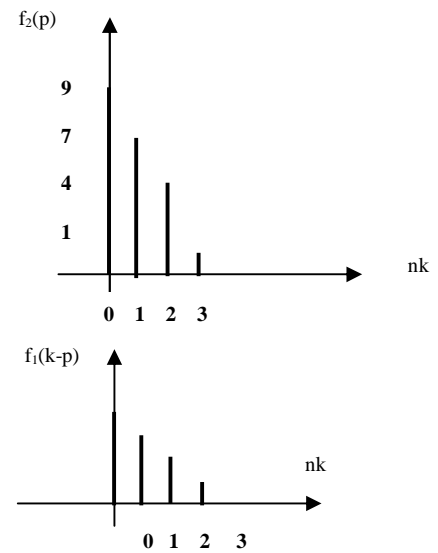
$$y(1) = 9.2 + 7.1 = 25$$

D'où $y(1) = 25$

3^{ème} cas : pour n = 2

$$y(n) = 9.3 + 7.2 + 4.1 = 42$$

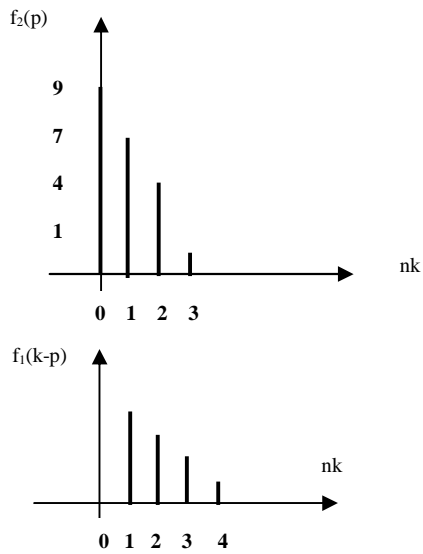
D'où $y(2) = 42$

4^{ème} cas : pour n = 3

$$y(n) = 9.4 + 7.3 + 4.2 + 1 = 66$$

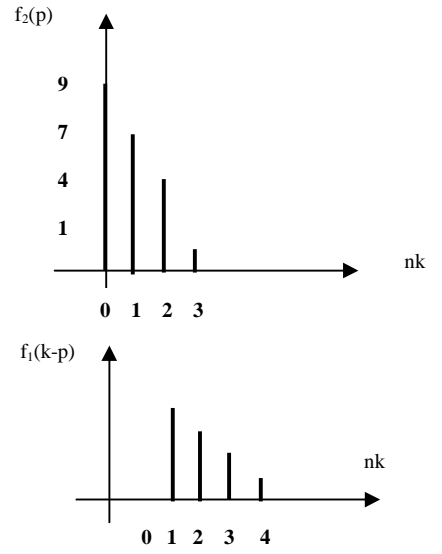
D'où $y(3) = 66$

5^{ème} cas : n= 4



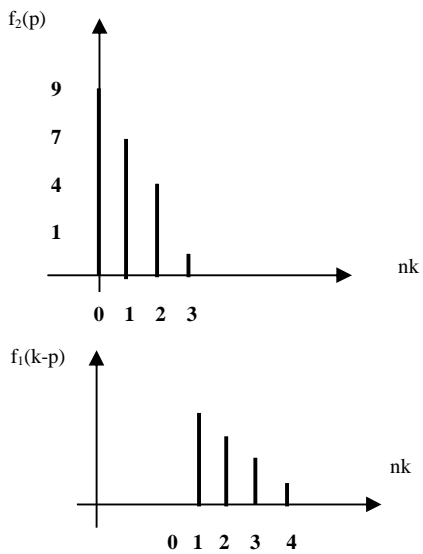
$y(5) = 7.4 + 4.3 + 1.2 = 45$
D'où $y(5) = 45$

6^{ème} cas : n =5



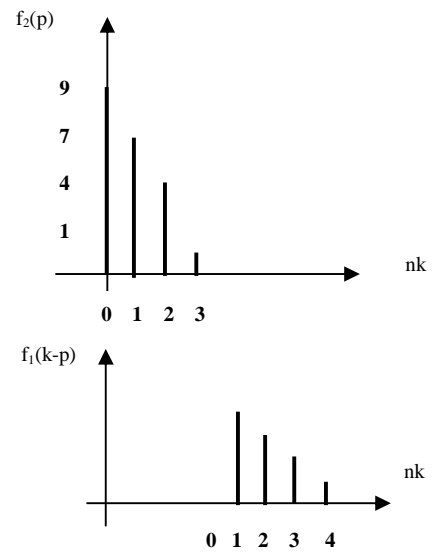
$y(6) = 4.4 + 1.3 = 19$
D'où $y(6) = 19$

7^{ème} cas : n= 6



$y(6) = 4. 1 = 4$
D'où $y(6) = 4$

8^{ème} cas : n= 7



Pas d'intersection entre les deux signaux.
D'où $y(7) = 0$

Figure (5.8) : les cas possible pour avoir le produit de convolution des signaux discrets $f_1(n)$ et $f_2(n)$

La représentation du produit de convolution $y(k)$ est :

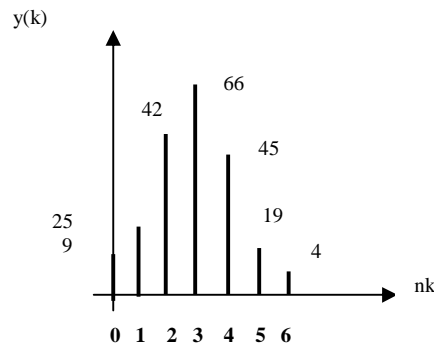


Figure (5.9) : Représentation du produit de convolution des deux signaux.

V. Transformée de Fourier d'un signal discret : TFTD

V.1. Définition

Un signal discret est défini par une suite d'échantillons espacés entre eux d'une période T_e . La transformée de Fourier appliquée à un signal discret $x[n]$ devient donc :

$$X(f) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{nf}{F_e}} = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow +\infty} x[n] \cdot e^{-2j\pi n f T_e}$$

Si cette série converge, la transformée de Fourier inverse est définie par :

$$x[n] = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} X(f) \cdot e^{2j\pi \frac{nf}{F_e}}$$

V.2. Propriétés de la TFTD

Globalement, la TFTD possède les mêmes propriétés que la TF.

$X(f)$ est une fonction complexe .

$|X(f)|$ est le spectre d'amplitude et $\arg(X(f))$ est le spectre de phase.

- ◆ Linéarité $a.x(n) + b.y(n) \rightarrow aX(f) + bY(f)$
- ◆ Décalage temporel $x(n - n_0) \rightarrow X(f)e^{-j2\pi f n_0}$
- ◆ Décalage fréquentiel ou modulation $x(n)e^{j2\pi f_0 n} \rightarrow X(f - f_0)$
- ◆ Changement d'échelle $x(an) \rightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$
- ◆ TF de la dérivée du signal $\frac{dx(n)}{dn} \rightarrow j2\pi f X(f)$
- ◆ Relation de Parseval (conservation de l'énergie) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2 df$
- ◆ Relations de Plancherel $x(n) * y(n) \rightarrow X(f).Y(f)$
 $x(n).y(n) \rightarrow X(f) * Y(f)$

V.3. Application

Soit le signal discret suivant :

$$x[n] = 1 \text{ si } |n| \leq N/2 \text{ sinon } x[n] = 0.$$

- 1- Représenter le signal discret et donner son expression en fonction d'Echelon unitaire;
- 2- Calculer la Transformé de Fourier de ce signal.

➤ Correction

- 1- C'est un signal rectangulaire d'amplitude $A=1$ et de durée $N+1$

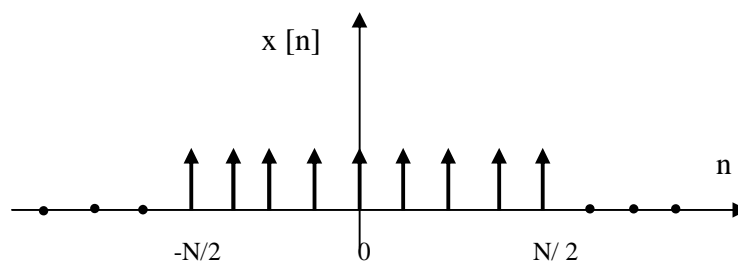


Figure (5.10) : Représentation du signal rectangulaire discret.

Le signal en fonction d'échelon :

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{u} [n + N/2] + \mathbf{u} [n - (N/2 + 1)]$$

2- La TFTD de $x[n]$ est :

$$X(f) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} x[n].e^{-2j\pi \frac{nf}{F_e}} = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow +\infty} x[n].e^{-2j\pi n f T_e}$$

Avec $T_e = 1$ s d'où $X(f) = \sum_{n=-N/2}^{n=N/2} .e^{-2j\pi n f}$

$X(f)$ est la somme de $N + 1$ termes d'une suite géométrique de raison $e^{-2j\pi f}$ et de premier terme $e^{j\pi N f}$.

$$\begin{aligned} X(f) &= e^{j\pi N f} \frac{1 - e^{-j2\pi(N+1)f}}{1 - e^{-j2\pi f}} = \frac{e^{j\pi N f} - e^{j\pi(N-2N-2)f}}{1 - e^{-j2\pi f}} = \frac{e^{j\pi(N+1-1)f} - e^{-j\pi(N+1+1)f}}{1 - e^{-j2\pi f}} \\ &= \frac{e^{-j\pi f} (e^{j\pi(N+1)f} - e^{-j\pi(N+1)f})}{e^{-j\pi f} . e^{j\pi f} - e^{-j\pi f} . e^{-j\pi f}} = \frac{(e^{j\pi(N+1)f} - e^{-j\pi(N+1)f})}{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}} \\ &= \frac{(e^{j\pi(N+1)f} - e^{-j\pi(N+1)f})/2j}{(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f})/2j} = \frac{\sin(\pi f(N+1))}{\sin(\pi f)} \end{aligned}$$

D'où

$$X(f) = \frac{\sin(\pi f(N+1))}{\sin(\pi f)}$$

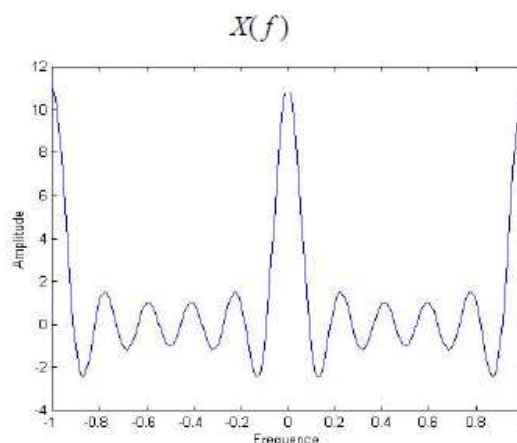


Figure (5.11) : Spectre du signal rectangulaire discret.

VI . Filtrage numérique

VI. 1. Système linéaire invariant dans le temps

Un système est *discret*, si à la suite d'entrée discrète $x(n)$ correspond une suite de sortie discrète $y(n)$.

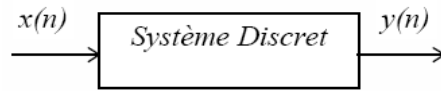


Figure (5.12) : Représentation d'un système discret.

- Un système est *linéaire*, si à la suite $ax_1(n) + bx_2(n)$ correspond la suite $ay_1(n) + by_2(n)$
- Un système est *invariant dans le temps*, si à la suite $x(n - m)$ correspond la suite $y(n - m)$.

Si $\delta(n)$ est la suite unitaire $\begin{cases} \delta(0) = 1 \\ \delta(n) = 0 \quad \forall n \neq 0 \end{cases}$, alors toute suite $x(n)$ peut s'écrire:

$$x[n] = \sum_{m \rightarrow -\infty}^{+\infty} x[m] \cdot \delta[n - m]$$

Si $h(n)$ est la réponse d'un système discret linéaire et invariant dans le temps à la suite $\delta(n)$ alors :

$$x[n] \rightarrow y[n] = \sum_{m \rightarrow -\infty}^{+\infty} x[m] \cdot \delta[n - m] = \sum_{m \rightarrow -\infty}^{+\infty} h[m] \cdot x[n - m]$$

On reconnaît alors une équation de convolution:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

Ainsi dès qu'un système peut être considéré comme linéaire, discret et invariant dans le temps, il en découle qu'il est :

- Régi par une équation de convolution ;
- Entièrement déterminé par la réponse $h(n)$ qu'il fournit lorsqu'il est excité par la suite impulsionnelle $\delta(n)$. Cette suite $h(n)$ constituant la réponse impulsionnelle du système.

VI.2. Transformée en z d'une séquence :

Le signal analogique est maintenant numérisé et transformé en une suite de valeurs numériques $x[n]$ codées sur N bits qu'on représente par des segments dont la hauteur est proportionnelle à la valeur binaire.

C'est une façon commode de représenter graphiquement une séquence numérique $x[n]$ constituée des valeurs du signal $x(t)$ aux instants $t=0, T_e, 2T_e \dots$. On supposera que le signal $x(t)$ est nul pour $t < 0$.

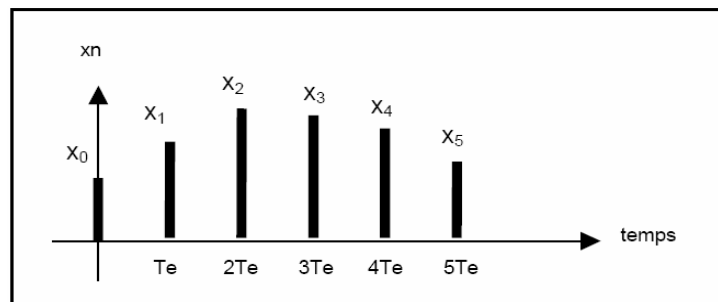


Figure (5.13) : Séquence d'échantillons.

On appelle transformée en z de la séquence numérique $x[n]$ le polynôme $X(z)$ défini par la relation :

$$X(z) = x_0 + x_1 \cdot z^{-1} + x_2 \cdot z^{-2} + x_3 \cdot z^{-3} + \dots$$

Exemple :

- ✓ Séquence impulsion unité :

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 \quad \text{à } t = 0 \\ x[n] &= 0 \quad \text{à } Te, 2Te \dots \end{aligned}$$

$$X(z) = 1$$



Figure (5.14) : Séquence impulsion unité .

- ✓ Séquence échelon :

$$\begin{aligned} x[n] &= 0 \quad \text{si } t < 0 \\ x[n] &= 1 \quad \text{si } t \geq 0 \end{aligned}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$



Figure (5.15) : séquence échelon.

La Transformée en Z d'une suite $x(n)$ est définie par l'expression suivante :

$$x[n] \xrightarrow{TZ} X(z) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

En considérant l'expression de la Transformée de Fourier discrète :

$$x[n] \xrightarrow{TFD} X(f) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-2j\pi n T_e}$$

Le passage de la Transformée en Z à la Transformée de Fourier est immédiat :

$$X(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f T_e}} = X(f)$$

Ainsi l'analyse d'un système discret se fera en général au moyen de la Transformée en Z, le passage en Fourier étant immédiat si nécessaire.

VI.3. Transmittance en z d'un filtre numérique :

De la même manière que la Transformée de Laplace est l'outil fondamental pour l'analyse des systèmes continus, la Transformée en Z est l'outil d'analyse pour les systèmes discrets. Soit un système qui à une séquence d'entrée x_n restitue en sortie une séquence y_n :

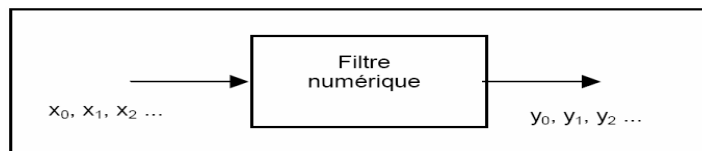


Figure (5.16) : Filtre numérique.

La transmittance $T(z)$ du filtre est alors définie par :

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Puisque les transformées $X(z)$ et $Y(z)$ sont des polynômes contenant les puissances négatives de z , la transmittance sera un rapport de deux polynômes en puissances négatives de z .

VI. 4. Structure générale d'un filtre numérique

Un filtre numérique calcule la valeur numérique de la sortie y_n à l'instant $t = n \cdot T_e$ à partir des échantillons précédents de la sortie et des échantillons précédents de l'entrée, plus celui qui vient d'être appliqué sur l'entrée x_n :

$$y_n = a_1 \cdot y_{n-1} + a_2 \cdot y_{n-2} + \dots + a_p \cdot y_{n-p} + b_0 \cdot x_n + b_1 \cdot x_{n-1} + b_2 \cdot x_{n-2} + \dots + b_q \cdot x_{n-q}$$

Cette formule de calcul ou algorithme conduit naturellement à la structure générale d'un filtre numérique :

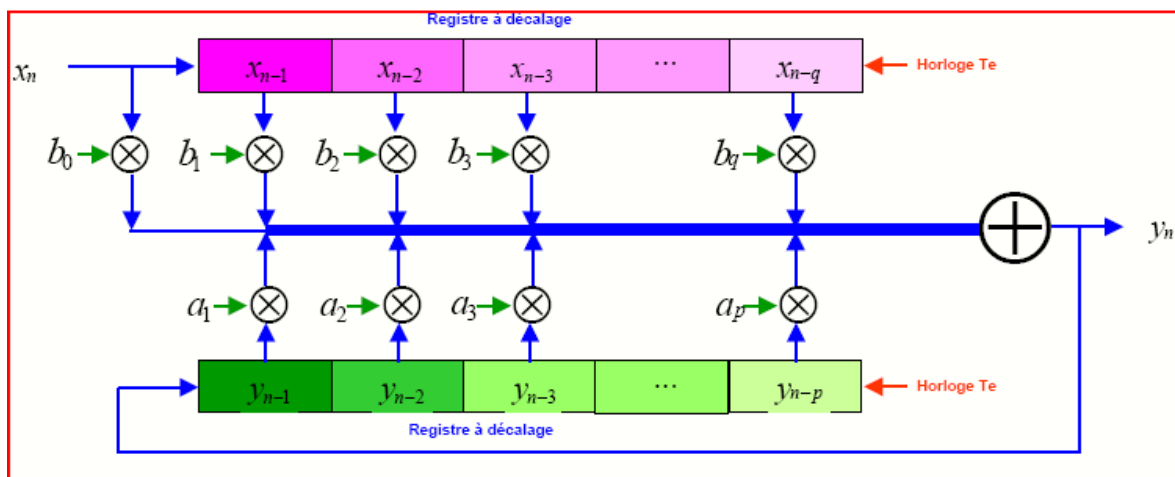


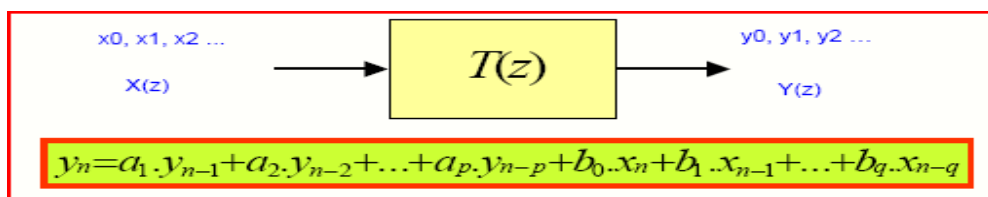
Figure (5.17) : Structure générale d'un Filtre numérique.

Remarque :

- Toutes les T_e secondes, les valeurs sont décalées dans les registres, multipliées par leur coefficient respectif et additionnées pour donner y_n .
- Cette structure peut être réalisée sous forme matérielle (registres, multiplicateurs, additionneur) ou entièrement logicielle.
- Un filtre simple calcule la sortie à partir de quelques échantillons seulement, au contraire, l'algorithme d'un filtre sophistiqué peut compter jusqu'à une centaine de termes.

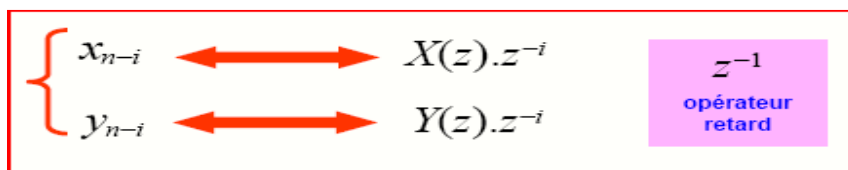
VI.5. Algorithme de calcul et transmittance $T(z)$:

L'algorithme nous permet de calculer la valeur de l'échantillon de sortie y_n en fonction des échantillons d'entrée et de sortie précédents. Le filtre numérique le plus général peut se décrire par un algorithme de calcul de la forme :



La transmittance $T(z)$ permet de synthétiser le filtre, de tracer son diagramme de Bode et d'étudier ses réponses à une impulsion, à un échelon ou à une entrée quelconque.

Pour passer de l'algorithme, relatif au domaine temporel, à la variable z , on utilise la règle de passage très simple:



En utilisant cette règle, l'algorithme se transforme en :

$$Y(z) = a_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} + a_2 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} + \dots + a_p \cdot Y(z) \cdot z^{-p} + b_0 \cdot X(z) + b_1 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + \dots + b_q \cdot X(z) \cdot z^{-q}$$

Soit, après factorisation

$$Y(z)(1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - \dots - a_p \cdot z^{-p}) = X(z)(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_q \cdot z^{-q})$$

Ce qui donne la transmittance en z du filtre :

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_q \cdot z^{-q}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - \dots - a_p \cdot z^{-p}}$$

VI.6. Les deux familles de filtres numériques

Suivant la forme de l'algorithme, on distingue deux grandes familles de filtres qui ont chacune leurs propriétés particulières:

VI.6.1. Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

- ⇒ Filtres pour lesquels **la sortie ne dépend que des entrées** et pas des sorties ;
- ⇒ leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un certain temps ;
- ⇒ ils s'appellent filtres non récursifs ou **à réponse impulsionnelle finie (RIF)** ;
- ⇒ ils n'ont pas d'équivalent analogique.

Un filtre à réponse impulsionnelle finie (**RIF**) est un système linéaire discret invariant dans le temps régi par une équation aux différences pour lequel l'échantillon de sortie $y(n)$ ne dépend que d'un certain nombre d'échantillons d'entrée $x(n)$.

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x(n-i)$$

Exemple : le filtrage par moyenne glissante $y_n = (x_n + x_{n-1} + x_{n-2})/3$.

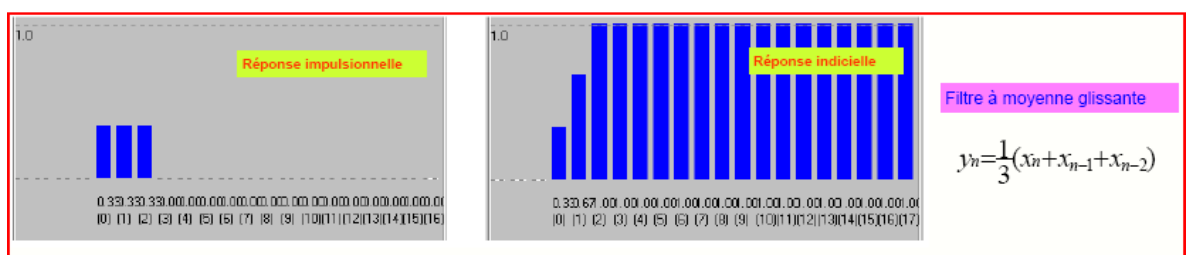


Figure (5.18) : Exemple d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (**RIF**) .

VI.6.2. Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

- ⇒ Filtres pour lesquels la sortie dépend des entrées et des sorties précédentes ;
- ⇒ leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un temps infini ;
- ⇒ ils s'appellent *filtres récursifs* ou à *réponse impulsionnelle infinie (RII)* .

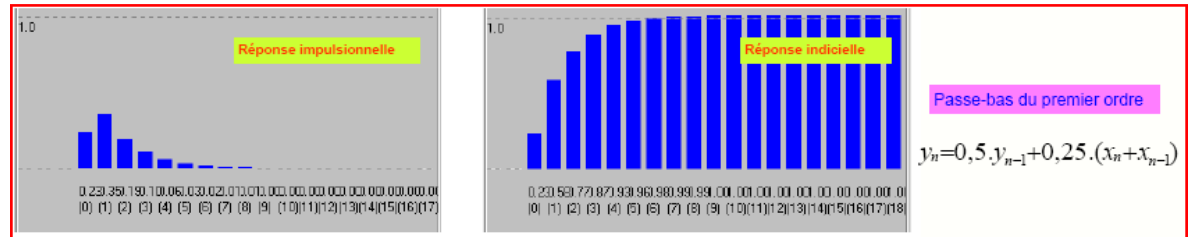
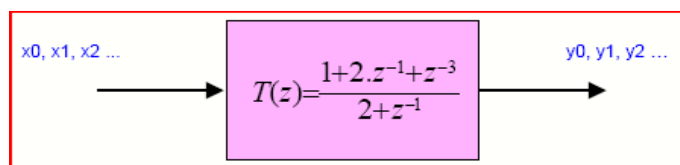


Figure (5.19) : Exemple d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) .

VI. 7. Exemple de passage de $T(z)$ à l'algorithme

On souhaite trouver l'algorithme de calcul du filtre caractérisé par la transmittance $T(z)$ suivante :



- La transmittance est le rapport entre la transformée en z de la sortie et la transformée en z de l'entrée.

$$T(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-3}}{2 + z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Soit , en faisant le produit en croix.

$$(1 + 2z^{-1} + z^{-3}) \cdot X(z) = (2 + z^{-1}) \cdot Y(z)$$

Ce qui donne, en isolant $Y(z)$:

$$2 \cdot Y(z) = -Y(z) \cdot z^{-1} + X(z) + 2 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + X(z) z^{-3}$$

En utilisant la règle de passage au domaine temporel, l'algorithme s'écrit :

$$2 \cdot y_n = -y_{n-1} + x_n + 2 \cdot x_{n-1} + x_{n-2}$$

Soit, enfin :

$$y_n = -0,5 \cdot y_{n-1} + 0,5 \cdot x_n + x_{n-1} + 0,5 \cdot x_{n-2}$$

Remarque :

Pour passer l'algorithme à la transmittance, on utilise une règle très simple :

1. écrire l'algorithme : $y_n = a_1 \cdot y_{n-1} + a_2 \cdot y_{n-2} + \dots + a_p \cdot y_{n-p} + b_0 \cdot x_n + b_1 \cdot x_{n-1} + b_2 \cdot x_{n-2} + \dots + b_q \cdot x_{n-q}$
2. passer en z en faisant correspondre $Y(z) \cdot z^{-j}$ à y_{n-i} et $X(z) \cdot z^{-j}$ à x_{n-i}
3. regrouper les termes en $Y(z)$ à gauche et les termes en $X(z)$ à droite
4. calculer $T(z) = Y(z)/X(z)$

Les mêmes opérations menées en sens inverse permettent de passer de la transmittance à l'algorithme.

VI.8. Stabilité d'un filtre numérique

Comme pour les filtres analogiques, il est possible de prévoir à partir de la transmittance la stabilité ou l'instabilité du système physique correspondant :

- ⇒ pour déterminer si un système analogique continu de transmittance $T(p)$ est stable on calcule les pôles qui sont les valeurs de « p » annulant le dénominateur ;
- ⇒ le système est stable si les pôles sont négatifs ou complexes avec une partie réelle négative ;
- ⇒ si on place ces pôles dans le plan complexe, ils se trouvent tous dans le demi-plan de gauche.

Ce critère de stabilité reste valable pour les transmittances $T^*(p)$ des systèmes échantillonnés.

- ⇒ un système échantillonné de transmittance $T^*(p)$ est stable si tous ses pôles $p_i = a_i + j \cdot b_i$ sont négatifs ou complexes à partie réelle négative ($a_i < 0$)

Comme avec les systèmes échantillonnés on travaille le plus souvent avec les transmittances en z , il est intéressant de voir la position des pôles z_i dans le plan pour un système stable.

- ⇒ un système échantillonné de transmittance $T(z)$ est stable si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

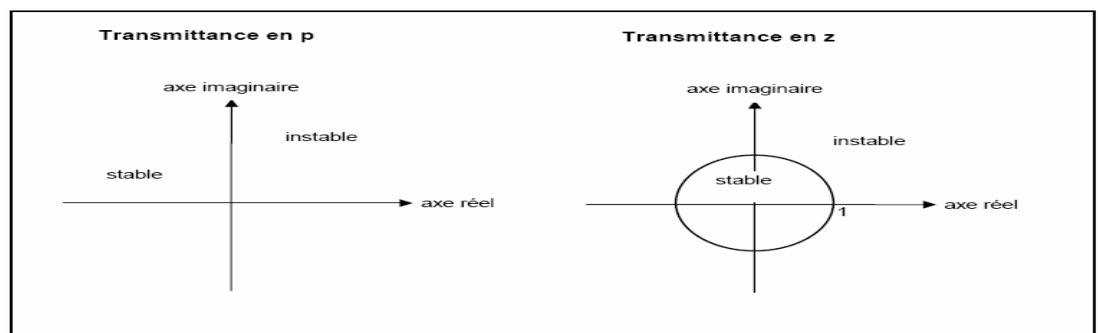


Figure (5.20) : Critère de stabilité d'un système numérique.