Théorie élémentaire de la RDM

1) Définitions:

La résistance des matériaux à pour objet l'étude de l'équilibre externe et interne des solides constituants les constructions.

Cette étude nécessite, d'une part la vérification de l'équilibre statique, d'autre part la recherche des valeurs des contraintes et des déformations subies par un corps donné, soumis à un système de forces extérieures ; parmi ces forces sont comptées les charges permanentes comprenant en particulier, le poids propre du corps), les charges variables dans le temps et les réactions d'appui nécessaires à l'équilibre du corps.

2) Hypothèses et principes de base de la RDM :

1) les déformations du corps sont supposées très petites et sans influence sur l'intensité et la direction des forces appliquées, et sur les conditions d'équilibre du corps (sauf notamment dans l'étude des corps sur appuis élastique et dans l'étude du flambement) ;
2) entre deux sections voisines d'une pièce prismatique, les variations de forme et d'étendue de section sont supposées être très progressives ;
3) la section droite (perpendiculaire à la fibre moyenne) d'une pièce prismatique reste plane après l'application des forces sur la pièce ; c'est l'hypothèse de **Navier-Bernoulli ;**
4) dans le domaine de l'élasticité de la matière, les déformations sont proportionnelles aux contraintes ; c'est **La loi de Hooke** ;
5) la généralisation de la loi de Hooke conduit au principe de superposition des effets des forces, selon lequel l'effet produit par un ensemble de forces est égal à la somme des effets produits par chaque force considérée isolément.
6) Homogénéité et isotropie : les matériaux étudiés en RDM doivent être homogènes et isotropes (même caractère physique et mécanique en tout point)

Exemple : - Acier : homogène et isotrope

- Bois : anisotrope

3) Etude de la notion de contraintes:

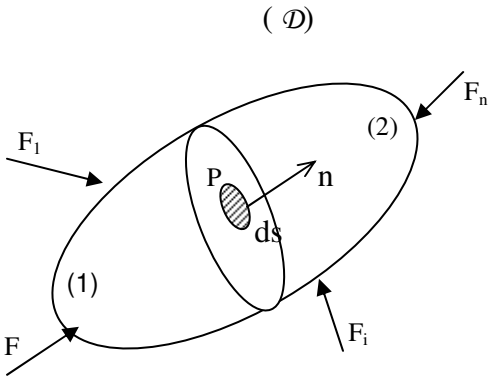
Le but de ce paragraphe est de mettre en place la notion de contraintes autour d'un point, dans le cas le plus général ou l'on va isoler un élément de volume au sein d'un solide ; nous mentionnerons aussi les propriétés essentielles liées à la représentation de l'état de contraintes.

3-1) Mise en place du vecteur-contrainte :

a) il nous faut pour cela étudier tout d'abord l'équilibre d'un solide isolé :considérons le domaine suivant, désigné par ($\mathcal{D}$) isolé au sein du volume de la structure à étudier.

Découpons par la pensée ($\mathcal{D}$) en deux domaine (1) et (2), et traduisons par exemple l'équilibre du domaine (1). Ce domaine est en équilibre, sous l'action :

- des forces extérieures appliquées à (1) ;
- des forces exercées par (2) sur (1) au travers de coupure que l'on à faite.

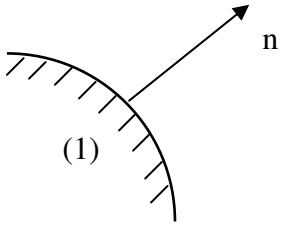


Le domaine (2) exerce sur (1) au travers de l'élément de surface ds des forces admettant pour résultante dF, et pour moment résultant dc (on néglige ce couple, du second ordre par rapport à dF).

On appelle vecteur-contrainte au point P, relativement au plan orienté par la normale n le vecteur :

$$\overrightarrow{T}(p,n) = \lim_{ds \to 0} (\overrightarrow{dF}/ds)$$

Remarque : On s'intéresse au domaine (1) , dont on étudie l'équilibre. Il est important de noter que relativement au milieu étudié, n désigne toujours la normale orientée vers l'extérieur :



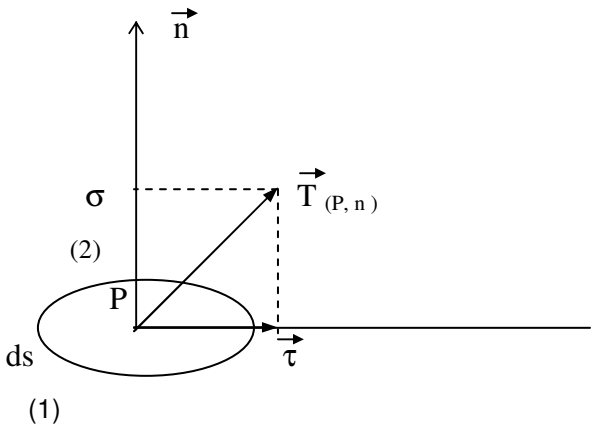
propriété de $\overrightarrow{T(p,n)}$: on peut aussi étudier l'équilibre de la région (2). La normale extérieure est alors n' = -n .En appliquant le théorème des actions réciproques, on obtient :

$$\overrightarrow{T}_{(P,-n)} = -\overrightarrow{T}_{(P,n)}$$

b-Expression du vecteur-contrainte :

On reprend l'écriture du vecteur $T_{(P,n)}$, et on va l'écrire en projection :

- sur le plan de l'élément d'aire ds ;
- sur l'axe n :



On a : $\sigma = \overrightarrow{T}_{(P,n)} . \overrightarrow{n}$

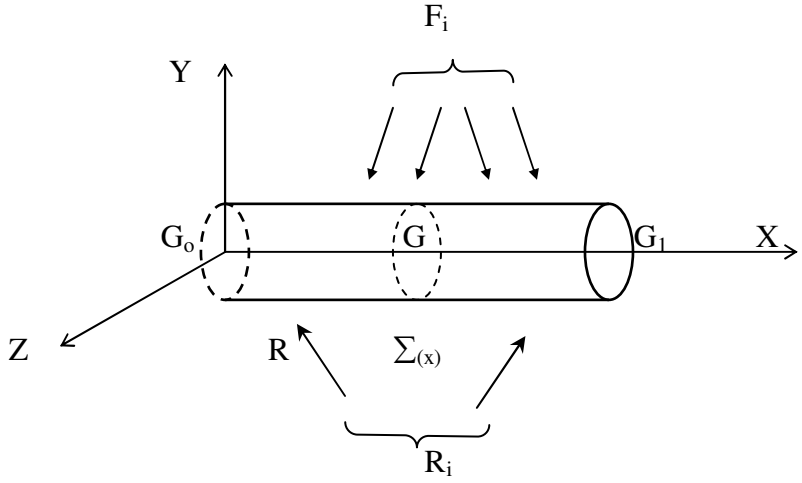
Et $\overrightarrow{T}_{(P,n)} = \sigma . \overrightarrow{n} + \overrightarrow{\tau}$

Avec | σ : désigne la contrainte normale ;
| τ : désigne la contrainte tangentielle.

4) Sollicitation dans une section (efforts internes)**:**

4-1) Notion de coupure :

Le but de ce paragraphe, déterminer quels sont les efforts qui se développent à l'intérieur de la matière. Pour cela, considérons une poutre droite en équilibre soumise à des efforts extérieurs quelconques F_i et à des réactions de liaison quelconque R_i.

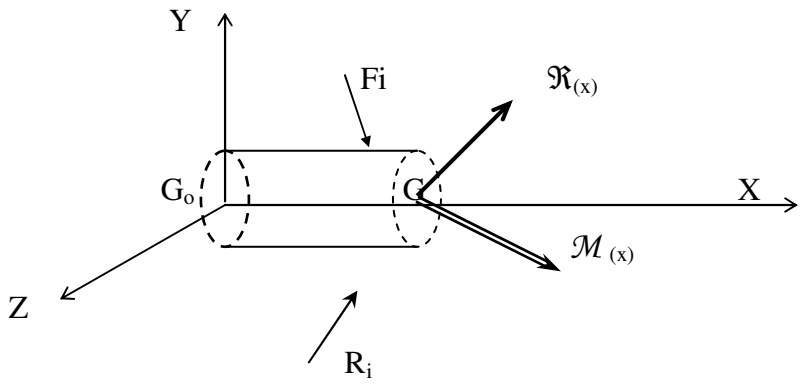


Et effectuons par la pensée une coupure fictive à l'abscisse x que nous noterons $\sum_{(x)}$. Isolons à présent le tronçon (1) située à gauche de la section fictive $\sum_{(x)}$ .Isolons à présent le tronçon (1) situé à gauche de la section fictive $\sum_{(x)}$.

Le tronçon est en équilibre sous l'action :

- des forces extérieures qui lui sont appliquées ;
- des éventuelles actions de liaison ;
- des forces que le tronçon de droite (2) exerce sur (1). (ces forces se développent à l'intérieure de la matière).

Nous pouvons exprimer ces « forces intérieures » sous la forme d'un torseur, écrit au centre de gravité de la section $\sum_{(x)}$. Nous adopterons donc la représentation suivante :



4-2) Définition des sollicitations :

Par définition, on appellera « sollicitation » les projections sur les axes X,Y,Z des vecteurs $\mathfrak{R}_{(x)}$ et $\mathcal{M}_{(x)}$ soit :

$\mathfrak{R}_{(x)}$:

- N(x) : effort normal ;
- $V_y(x)$: effort tranchant suivant y ;
- $V_z(x)$: effort tranchant suivant z ;

$\mathcal{M}_{(x)}$:

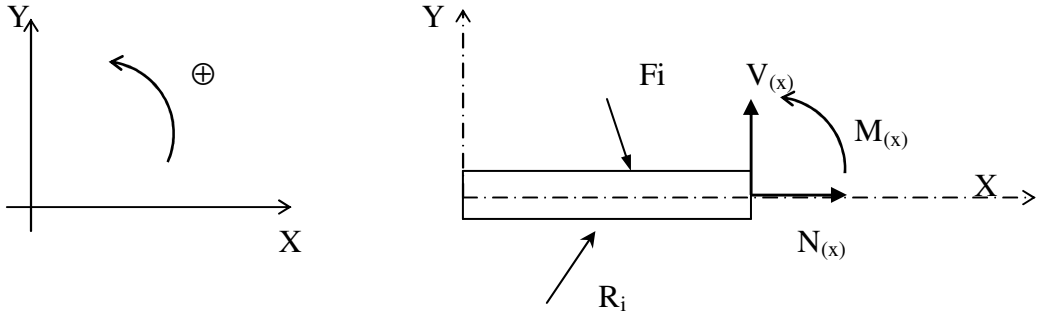
- Mt(x) : moment de torsion ;
- $M_y(x)$: moment fléchissant portée par y ;
- $M_z(x)$: moment fléchissant portée par z ;

Dans la suite, nous considérerons essentiellement des problèmes plans, les efforts extérieurs étant situés dans le plan (o,x ,y). Dans ces conditions, les seules composantes non nulles du torseur des sollicitations sont :

- l'effort normal N(x) ;
- l'effort tranchant suivant y, que nous noterons V(x) ;
- le moment fléchissant suivant z , que nous noterons M(x).

et nous adopterons la représentation suivante :

a) *cas du tronçon gauche* :

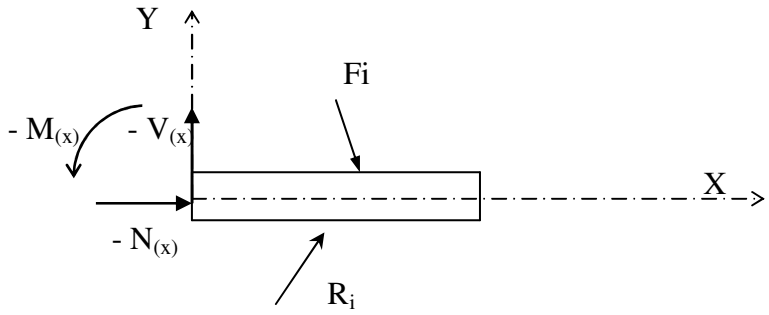


Convention : a ce stade du calcul, les sollicitations N,V et M sont inconnues ; c'est pourquoi nous les représentons par convention par un vecteur orienté dans le sens positif des axes .

Cela nous conduit à définir un sens positif pour les couples et le moment fléchissant portés par z. Nous conviendrons que ce sens positif est le sens trigonométrique direct :

a) *cas du tronçon droite* :

Il peut être plus facile d'appliquer le principe fondamental au tronçon de droite. D'après les conventions que nous avons adoptées et en vertu du théorème des actions réciproques, nous représenterons le système à étudier de la façon suivante :



Connaissant les sollicitations dans une section quelconque , il suffit alors de faire varier x le long de la poutre pour connaître les sollicitations dans toutes les sections. On obtient alors des diagrammes des sollicitations N,V et M en fonction de x.

4-3) Equations d'équilibre-tracé des diagrammes:

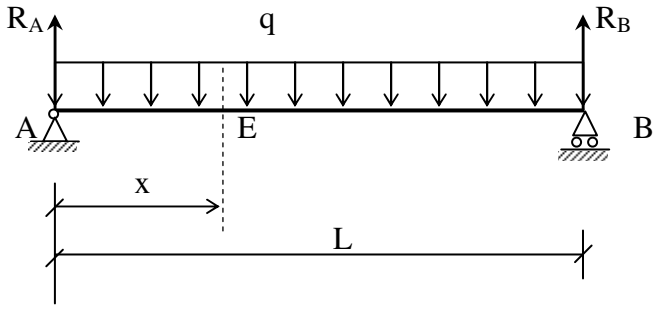
La finalité de la théorie des poutres est de connaître le comportement des particules dans toute section d'une poutre.

Pour étudier la structure on procède comme suit :

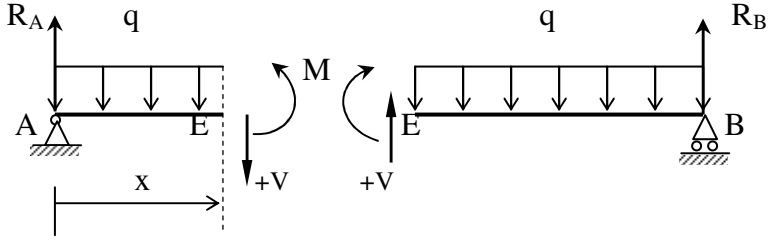
- faire la représentation mécanique de la structure sans oublier de mettre les actions et les réactions (suivant le type d'appui) ;
- appliquer le PFS pour déterminer les réactions d'appuis ;
- faire la coupure pour chaque intervalle (on appelle intervalle, la zone dans laquelle on a le même chargement), et écrire le torseur à gauche ou à droite des sollicitations.
- tracer les diagrammes des sollicitations en fonction des équations déjà trouvées.

4-4) Exemple **:** *sollicitation d'une poutre*

Soit le cas d'une poutre soumise à une charge verticale uniformément répartie :



- Sur une section droite de la poutre, la charge produit un effort tranchant V et un moment fléchissant M.
- On peut mettre en évidence ces efforts intérieurs en faisant une coupe à la distance x de l'appui gauche A de la poutre et en isolant les deux tronçons AE et EB crées par cette coupe.



On considère l'origine des axes de coordonnées à l'appui gauche A. On fait alors une coupe à la distance x de A et l'on considère le tronçon de la poutre à gauche de la coupe, où l'on a mis en évidence l'effort tranchant V et le moment fléchissant M.

Commentaire : Sur cette même figure, on montre l'effort tranchant V et le moment fléchissant M inconnus suivant le sens positif, comme il a déjà été défini pour les efforts entre les extrémités d'une poutre. Les résultats des calculs qui suivent détermineront le sens exact de ces efforts intérieurs. On utilisera le même principe dans les autres exemples. Pour déterminer les efforts intérieurs M,V et N, on écrira l'équation d'équilibre des forces agissant sur le tronçon à gauche ou à droite de la coupe. On choisira le tronçon où les équations d'équilibre sont plus simples à écrire.

- Calcul des réactions :

De l'équation de la statique $\Sigma M_B = 0$, on a :

$$R_A.L - q.L^2/2 = 0$$

D'où

$$R_A = q.L/2 = R_B \quad \text{(à cause de la symétrie)}$$

- Détermination du diagramme des efforts tranchants :

L'effort tranchant V est déterminé en écrivant l'équation d'équilibre statique de toutes les forces verticales agissant sur le tronçon. De l'équation $\Sigma Fy = 0$, on a :

$$RA - q.x - V = 0$$

D'où, pour $0 \leq x \leq L$, en remplaçant RA par sa valeur, on trouve :

$$V = RA - q.x = q.L/2 - q.x \qquad (1)$$

De l'équation (1), on voit que les valeurs de l'effort tranchant varient le long de l'axe de la poutre.

Pour x = 0,	V=q.L/2
Pour x = L/4,	V= q.L/4
Pour x = L/2,	V= 0
Pour x = 3L/4,	V= - q.L/4
Pour x = L,	V= - q.L/2

Avec ces valeurs, on peut tracer le diagramme des efforts tranchants. Dans le cas de cette poutre, la variation de l'effort tranchant est linéaire et l'effort tranchant maximal se trouve aux appuis. Conformément à la convention de signe, il est positif dans la moitié gauche de la poutre et négatif dans la moitié droite.

- Détermination du diagramme des moments fléchissant :

Le moment fléchissant M en une section x de la poutre est déterminé en écrivant l'équation d'équilibre statique des moments de toutes les forces agissants sur le tronçon à gauche de la section x. On doit avoir :

$$\Sigma M_x = 0$$

$$R_A.x - q.x^2/2 - M = 0$$

D'où, pour $0 \leq x \leq L$,

$$M = R_A.x - q.x^2/2 = qL.x/2 - q.x^2/2 \qquad (2)$$

De l'équation (2), on voit que les valeurs du moment fléchissant varient le long de l'axe de la poutre.

Pour x = 0 , M = 0

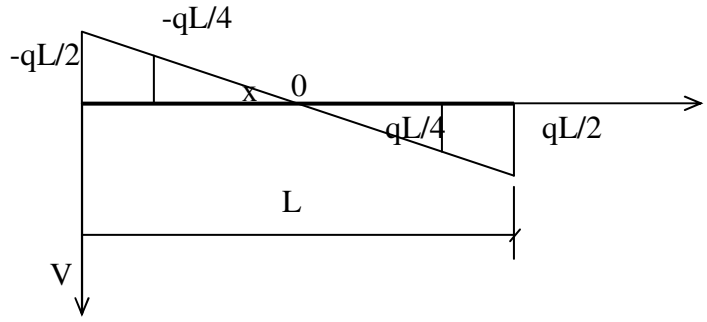
Pour x = L/4 , M = 3qL²/32

Pour x = L/2 , M = qL²/8

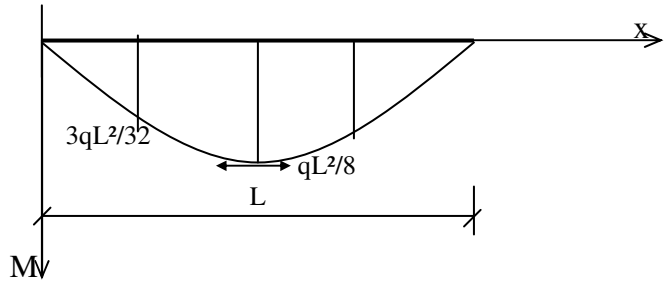
Pour x = 3L/4 , M = 3qL²/32

Pour x = L , M = 0

Avec ces valeurs, on peut tracer le diagramme des moments fléchissant. Le moment fléchissant est positif et varie d'une façon parabolique. Il est maximal au milieu de la poutre où l'effort tranchant est égal à zéro.



(**DET**)



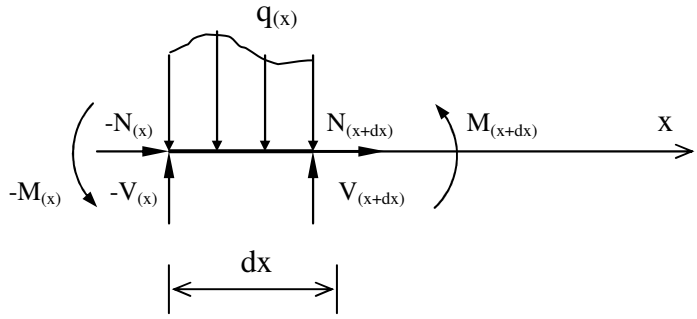
(**DMF**)

Commentaires :

- La convention de signe dont on s'est servi pour écrire les équations d'équilibre est celle qui est utilisée en statique ;
- Pour l'exemple précédant , on a déterminé les valeurs de l'effort tranchant et du moment fléchissant en plusieurs points, puis on a tracé les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants ;
- Par convention, le diagramme des efforts tranchants est tracé au-dessus ou au-dessous de l'axe de la poutre suivant que l'effort tranchant est positif ou négatif. De même, le diagramme des moments fléchissants est tracé du coté des fibres tendues. Dans cet exemple, il est tracé en dessous de l'axe de la poutre, car le moment fléchissant entre les appuis est positif donc, les fibres inférieures sont tendues

4-5) Relation entre effort tranchant et moment fléchissant :

Considérons une poutre soumise à une charge répartie q(x) et isolons à l'intérieur de cette poutre un tronçon de longueur « dx ».



Ecrivons l'équilibre statique de ce tronçon en projetant sur les axes les équations vectorielles du principe fondamental de la statique :

Projection sur x : $N(x+dx) - N(x) = 0$ (1)

Projection sur y : $V(x+dx) - V(x) - q(x).dx = 0$ (2)

Projection sur z : $M(x+dx) - M(x) + q(x).dx^2/2 + V(x).dx = 0$ (3)

(les moments sont exprimés par rapport à G_{x+dx} , centre de gravité de la section située à l'abscisse x+dx).

Par définition de la dérivée (voir cours de mathématiques) on peut écrire :

$$V(x+dx) - V(x) = \frac{dV}{dx}.dx$$

L'équation (2),fournit donc la relation :

$$\boxed{dV/dx = q(x)} \qquad (4)$$

Transformons l'équation (3) en remarquant que $(dx)^2/2$ est négligeable devant les autres termes (infiniment petit du second ordre).

Il vient : $\boxed{dM/dx = -V(x)}$ (5)

En rassemblant les deux équations (4) et (5) il vient :

$$\boxed{d^2M/dx^2 = -q(x)} \qquad (6)$$

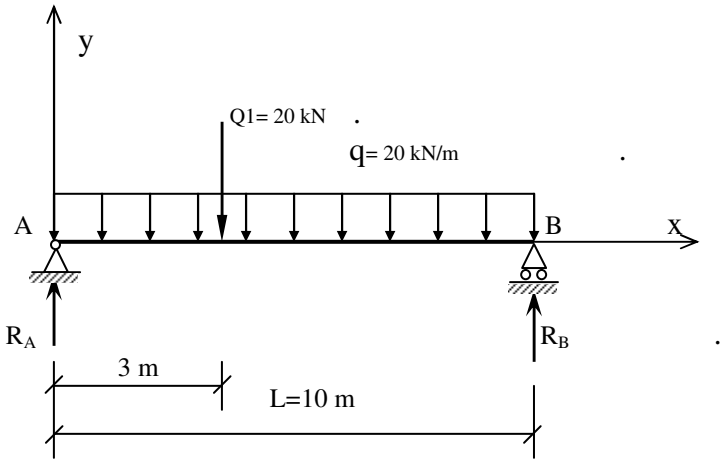
Commentaires :

Ces trois relations permettent :

- soit de déterminer V et M dans un tronçon de poutre soumis à une charge répartie ;
- soit de vérifier l'exactitude d'un tracé de diagrammes des sollicitations ;
- soit de déterminer la section la plus sollicitée en flexion (la section où l'effort tranchant est égal à zéro).

4-6) Applications :

1) On donne la poutre simplement appuyée qui supporte les charges montrées sur la figure 1. déterminer les réactions de la poutre et les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants le long de l'axe de la poutre.



Solution :

A - Calcul des réactions :

On calcule R_A en prenant

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A.L - Q_1.(L-3) - q.L^2/2 = 0$$

D'où

$$R_A.L = Q_1.(L-3) + q.L^2/2 \qquad (1)$$

Dans l'équation (1), en remplaçant L,q et Q_1 par leurs valeurs, on a

$$10.R_A = 20.(10-3) + (20*10*5) = 1140$$

$$R_A = 1140/10 = 114 \text{ kN}$$

De l'équation $\Sigma Fy = 0$, on a

$$R_A + R_B - 220 = 0$$

D'où

$$R_B = 220 - 114 = 106 \text{ kN}$$

B - Détermination du diagramme des efforts tranchants :

de l'équation $\Sigma Fy = 0$, on a, pour $0 \le x \le 3$m,

$$R_A - qx - V(x) = 0$$

D'où

$$V(x) = R_A - qx = 114 - 20.x$$

Pour $3 \le x \le 10$,

$$R_A - Q1 - q.x - V(x) = 0$$

$$V(x) = R_A - Q1 - q.x = 114 - 20 - 20.x$$

De l'équation ci-dessus, pour $x = (114 - 20)/20 = 4.7$m,

$$V(4.7) = 0$$

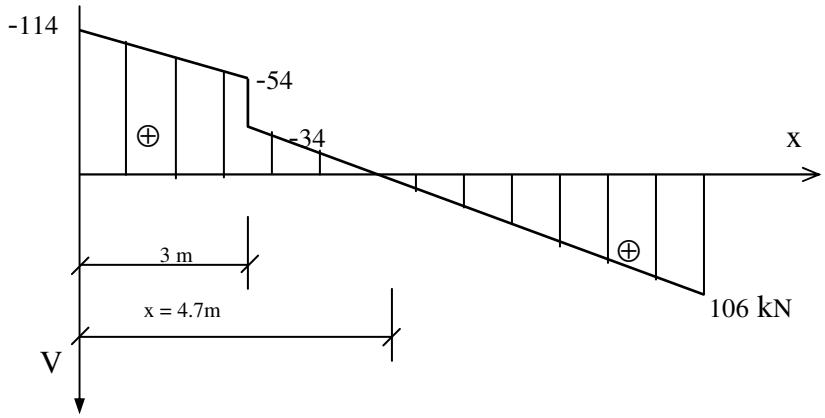
Pour x = 0, V = 114 kN ;

Pour x = 3m, V_g = 54 kN ; (à gauche de la section d'abscisse 3m)

V_d = 34 kN ; (à droite de la section d'abscisse 3m)

Pour x = 10 m, V = -106 kN.

Avec ces valeurs, on peut tracer le diagramme des efforts tranchants :



(**DET**)

C-<u>Détermination du diagramme des moments fléchissants :</u>

De l'équation Σ Mx = 0, pour 0≤ x ≤ 3m, on a :

$$R_A.x - q.x^2/2 - M(x) = 0$$

D'où

$$M(x) = R_A.x - q.x^2/2 = 114.x - 20.x^2/2$$

pour 3≤ x ≤ 10m, on a :

$$R_A.x - Q_1(x-3) - q.x^2/2 - M(x) = 0$$

D'où

$$M(x) = 114.x - 20\,(x-3) - 20.x^2/2$$

On a dM/dx = 114 –20 –20.x

Et dM/dx = 0, pour

$$x=\frac{114-20}{20}=4.7m$$

des étapes B et C, on constate donc que pour x = 4.7m, v=dM/dx = 0 .L'effort tranchant est égal à zéro et, par conséquent, la valeur du moment fléchissant est maximale.

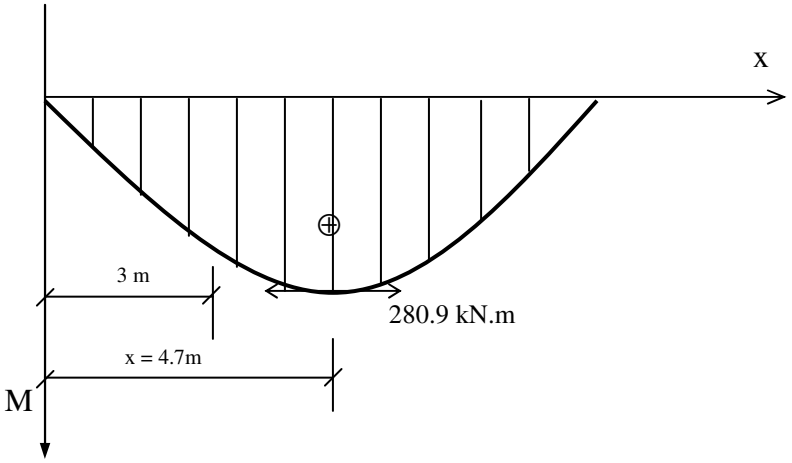
Pour x =0, M=0 ;

Pour x = 3m, M= 252 kN.m ;

Pour x=4.7m, M_{max} = 280.9 kN.m ;

Pour x =10m, M=0 ;

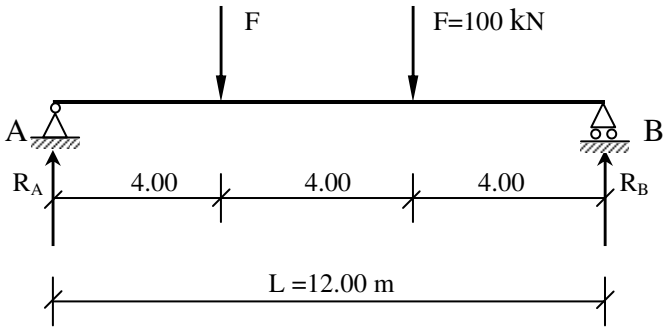
Avec ces valeurs, on peut tracer le diagramme des moments fléchissant :



(**DMF**)

Commentaire : en examinant les diagrammes des efforts internes, on constate que la valeur de l'effort tranchant, à la section où la charge concentrée est appliquée, diminue verticalement de la valeur de cette dernière. Cependant, le diagramme des efforts tranchants ne traverse pas l'axe de la poutre et, par conséquent, l'effort tranchant à cette section n'est pas égal à zéro. Comme on l'a établi, il est égal à zéro à la section d'abscisse x =4.7m, et le moment fléchissant est maximal à cette section.

2) On donne la poutre simplement appuyée qui supporte des charges concentrées (voir figure ci-après). Déterminer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants le long de la poutre.



Solution :

On a $R_A = R_B = 100$ kN (par raison de symétrie) ;

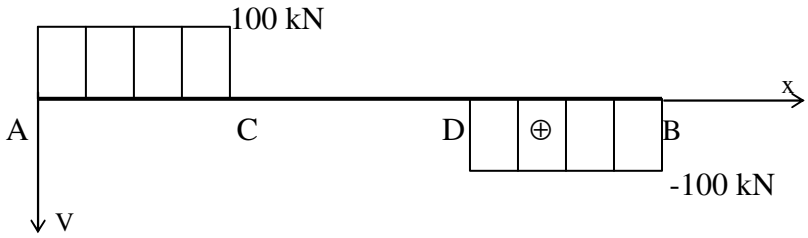
A- détermination du diagramme des efforts tranchants :

pour $0 \leq x \leq 4$m, $V = R_A = 100$ kN

pour $4 \leq x \leq 8$m, $V = R_A - F = 100 - 100 = 0$

pour $8 \leq x \leq 12m$, $V = R_A - F - F$

$= 100 - 100 - 100 = -100$ kN

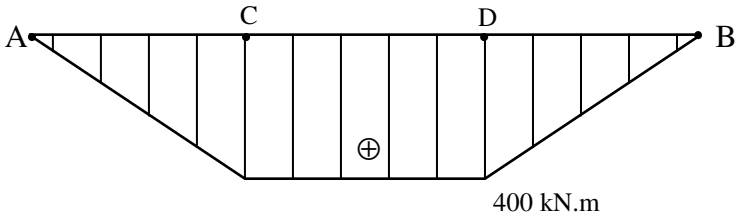


(DET)

B- détermination du diagramme des moments fléchissants :

pour $0 \leq x \leq 4m$, $M = R_A.x = 100.x$ ⟶ $\begin{cases} x = 0, & M=0 ; \\ x = 4, & M = 400 \text{ kN} \end{cases}$

pour $4 \leq x \leq 8m$, $M = R_A.x - F.(x-4)$ ⟶ $\begin{cases} x = 4, & M=400\text{kN.m} ; \\ x = 6, & M = 400 \text{ kN.m}; \\ x = 8, & M = 400 \text{ kN.m}. \end{cases}$



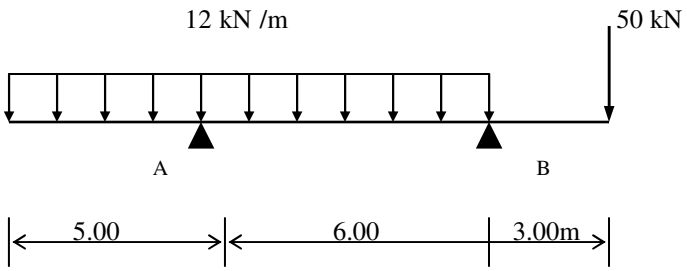
(DMF)

Commentaire :En examinant les diagrammes des efforts internes, on constate que les relations fondamentales exprimées par les équations (4) et (5) du paragraphe 4.4 sont justifiées. Ainsi, sur les parties AC et DB de la poutre, comme l'effort tranchant est constant, la pente du moment fléchissant est constante et le moment fléchissant varie linéairement le long de ces parties. En outre, sur la partie CD de la poutre, comme l'effort tranchant est égal à zéro, le moment fléchissant est constant et on a une flexion pure sur cette partie de la poutre. De plus, sur ces parties, l'effort tranchant étant constant ou égal à zéro, l'équation (6) est justifiée et, par conséquent, la poutre ne supporte pas de charge uniforme.

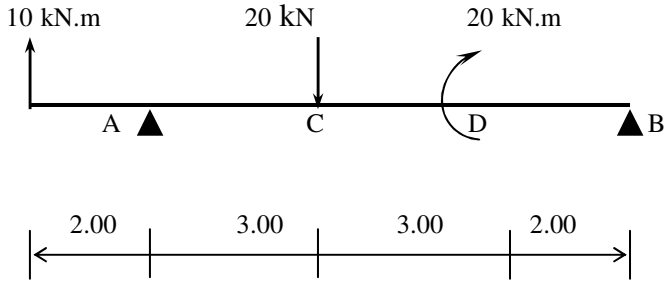
EXERCICES

Tracer les diagrammes des efforts tranchants (DET) et les diagrammes des moments fléchissants (DMF) des poutres et des portiques montrés pour chacun des exercices ci-après.

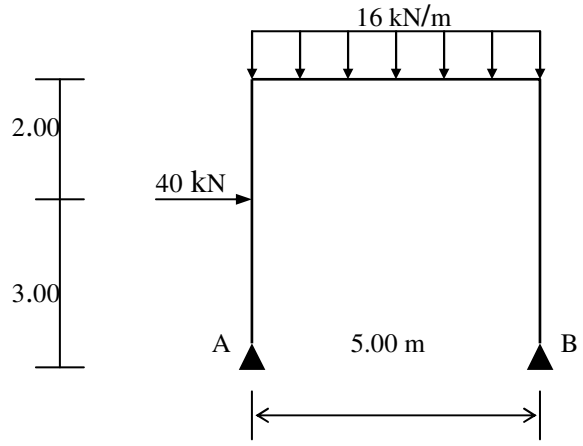
Exercice II.1



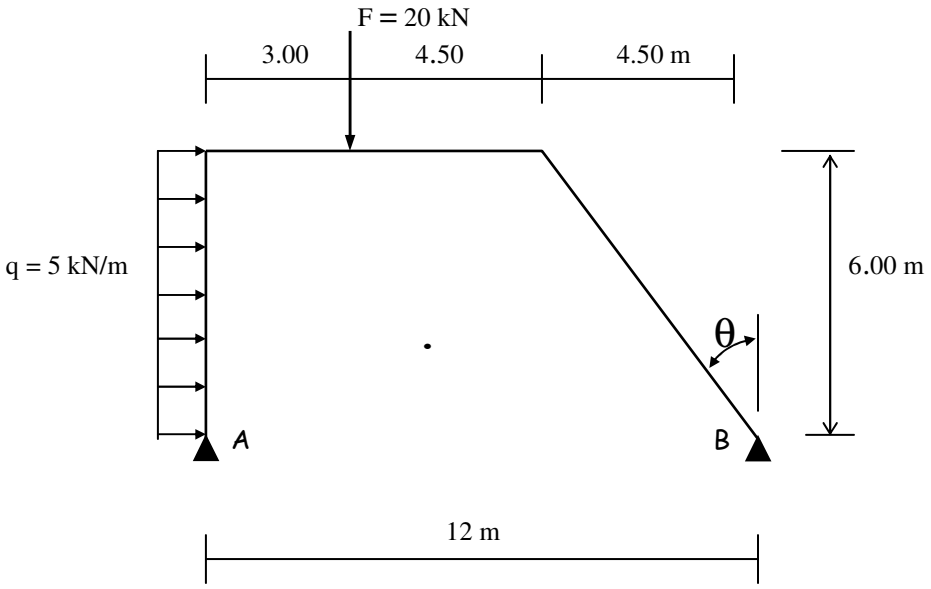
Exercice II.2

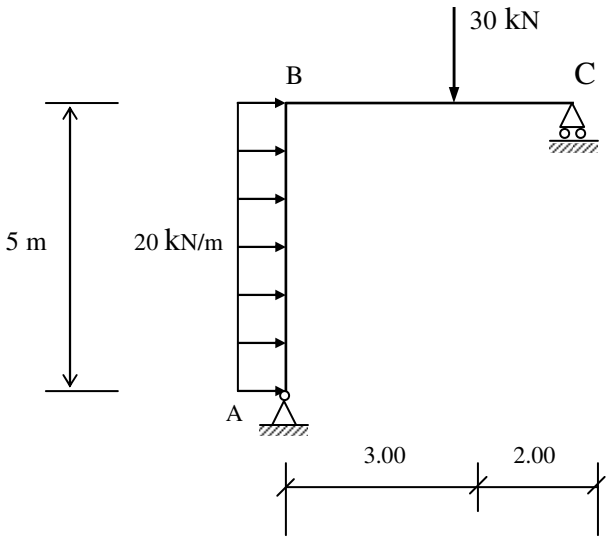


Exercice II.3



Exercice II.4



Exercice II.5

On considère le demi-portique, supportant les charges montrées sur la figure ci-après. Déterminer les diagrammes des efforts internes.