Chapitre 5

La torsion Simple

5.1 HYPOTHÈSES PARTICULIÈRES

5.1.1 Hypothèses sur le solide :

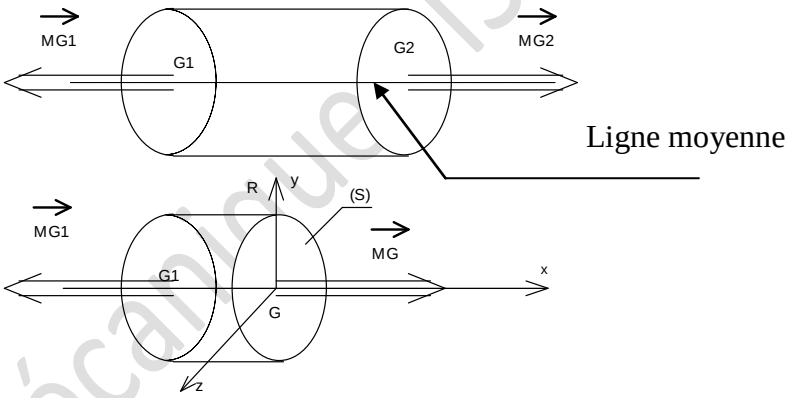
-Le solide étudié est une poutre cylindrique droite de section circulaire.

-Le diamètre de la section est constant.

-Le poids de la poutre est négligé.

5.1.2 Hypothèses sur le système :

des forces extérieures appliquées et sur les déformations qui en résultent



- La poutre est sollicitée en torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à deux couples opposés $\overrightarrow{M_{G1}}$ et $\overrightarrow{M_{G2}}$ ayant pour support la ligne moyenne et tels que: $\overrightarrow{M_{G1}} + \overrightarrow{M_{G2}} = \vec{0}$

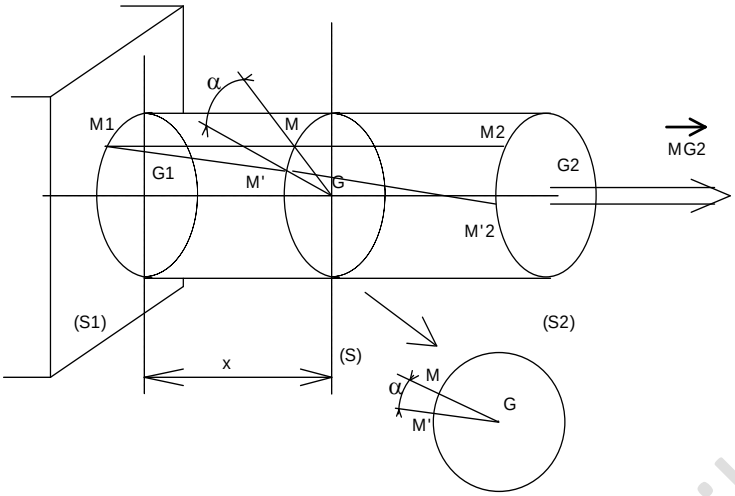
-Les déformations seront toujours limitées au domaine élastique et la variation de longueur des fibres est considérée comme négligeable.

5.2 ÉTUDE EXPÉRIMENTALE :

5.2.1 Essai de torsion :

Le dispositif expérimental utilisé peut se schématiser par la suivante :

Genie Mécanique ISET Siliana



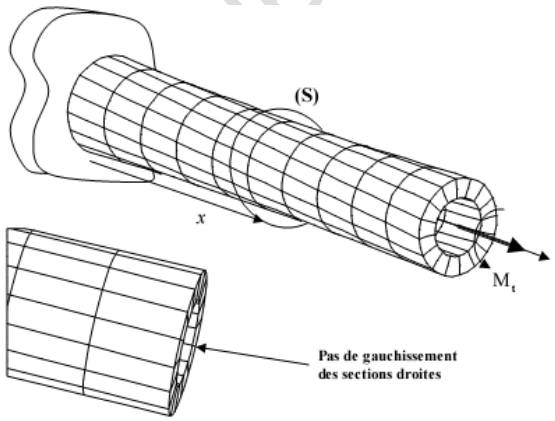
La poutre (cylindre de révolution) est parfaitement encastrée à son extrémité gauche, le section (S_1) de centre de gravité G_1 .On trace avant l'essai une génératrice M_1M_2 du cylindre .On applique à l'extrémité droite, de section (S_2) de centre de gravité G_2, un système de forces extérieures pouvant se réduire à un seul vecteur moment $\overrightarrow{M}_{G1}$ porté par l'axe (x', x) .En faisant croître l'intensité de ce moment , on mesure les déformations de la poutre .On constate que :

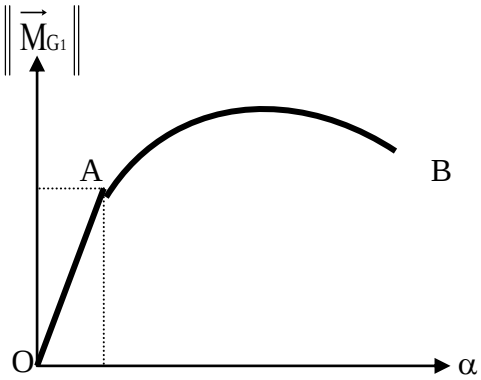
- Toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe.
- La distance de deux sections droite est uniquement une rotation d'angle α autour de son axe et cette rotation est proportionnelle à la distance x à la section d'encastrement :

$$\alpha = \mathbf{K.x}$$

La génératrice du cylindre se déforme donc suivant une hélice : (M_1, M'_2).

Lorsque $\left\| \overrightarrow{M}_{G1} \right\|$ croit, un système enregistreur non représenté permet de mesurer α.





5.2.2 Angle unitaire de torsion

Pour une valeur donnée de $\overrightarrow{M_{G2}}$, ($\overrightarrow{M_{G2}} < \overrightarrow{M_{G1}}$) l'angle de torsion **α** de la section (**S**) , par rapport à la section ($\mathbf{S_1}$) d'encastrement , ne caractérise pas la déformation de torsion , puisqu'il est fonction de l'abscisse **x** du centre de (**S**) .Soit **θ** l'angle dont tournent l'une par rapport à l'autre deux sections distantes de l'unité de longueur : $\theta = \dfrac{\alpha}{x}$

θ est appelé angle unitaire de torsion et s'exprime en radians par millimètre (**rad / mm**) . Si α_{12} est l'angle dont tourne ($\mathbf{S_2}$) par rapport à ($\mathbf{S_1}$) et si $\mathbf{l_{21}}$ est la distance de ces deux sections alors :

$$\alpha_{21} = \theta . l_{21} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_{21} = \text{angle en radian} \\ \theta = \text{en rad/mm} \\ l_{21} = \text{en mm} \end{cases}$$

5.2.3 Loi de Hooke

Si nous considérons un petit élément **Δx** d'un fibre avant et après déformation, on constate que celui-ci a subi une déviation γ_M tout à fait comparable à celui que nous avions observé dans l'étude du cisaillement .Une étude expérimentale plus poussée nous montrerait une grande analogie entre les résultats expérimentales de la torsion et du cisaillement.

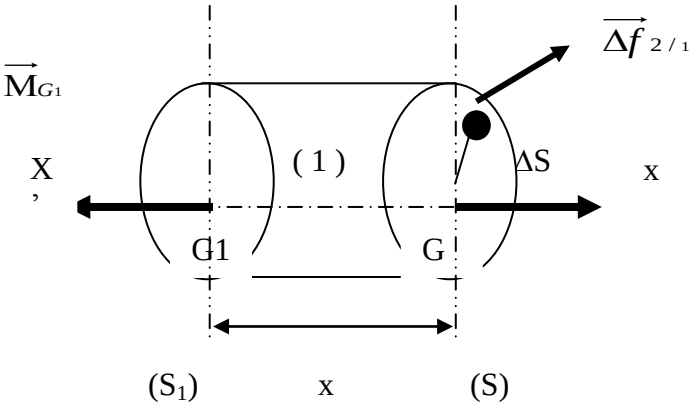
La loi de Hooke s'exprime par : $\tau_M = G . \gamma_M$ avec $\begin{cases} \tau_M \text{ en } N/mm^2 \\ G \text{ en } N/mm^2 \\ \gamma_M \text{ en rad} \end{cases}$ (1)

τ_M est la norme du vecteur contrainte tangentielle en un point **M** d'une section droite .G est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb. Pour l'acier : $\mathbf{G = 8 .10^4\ N/mm^2}$.

5.3 CONTRAINTE DANS UNE SECTION DROITE

5.3.1 Equilibre d'un tronçon de poutre

Genie Mécanique - ISET Siliana



❖ **Définition du moment de torsion :**

Dans une section (S) de centre de gravité G, le moment de torsion Mt est la projection sur la normale extérieure Gx de la somme des moments en G de toutes les forces extérieures à gauche de (S).

❖ Prenons la figure ci-dessus du tronçon (1) et réduisons l'équilibre en G le système des forces à gauche de (S) :

➢ En G $\begin{cases} \sum \vec{F}_i \text{ à gauche} = \vec{0} \\ \sum \overrightarrow{M}_{iG} \text{ à gauche} = \overrightarrow{M}_{G1} \end{cases}$ (2)

Nous pouvons donc poser ici : $\overrightarrow{M}_{G1} = \overrightarrow{M}_t$

Equations d'équilibre de (1) :

➢ En G $\begin{cases} \sum \vec{F}_i \text{ à gauche} + \sum \overrightarrow{\Delta f}_{2/1} = \vec{0} \\ \sum \overrightarrow{M}_{iG} \text{ à gauche} + \sum \overrightarrow{M}_G(\overrightarrow{\Delta f}_{2/1}) = \vec{0} \end{cases}$ (3)

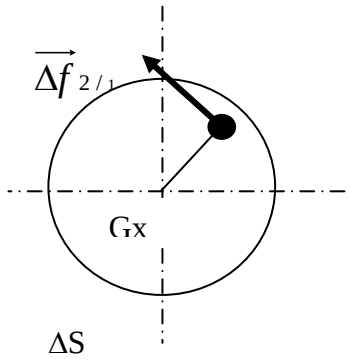
En tenant compte de (2) et en écrivant que : $\begin{cases} \sum \overrightarrow{\Delta f}_{2/1} = \vec{R}_{2/1} \\ \sum \overrightarrow{M}_G(\overrightarrow{\Delta f}_{2/1}) = \overrightarrow{M}_{G2/1} \end{cases}$ (4)

Les équations d'équilibre (3) s'écrivent :

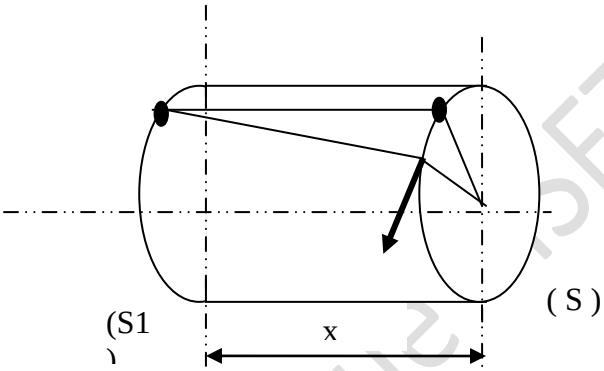
➢ En G $\begin{cases} \vec{R}_{2/1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_{G2/1} + \overrightarrow{M}_t = \vec{0} \end{cases}$ (5)

La théorie de l'élasticité permet de démontrer que ces forces élémentaires $\overrightarrow{\Delta f}_{2/1}$ *sont dans le plan de la section (S) et normales au rayon.*

Genie Mécanique - ISET Siliana



5.3.2 Répartition des contraintes dans la section droite (S) :



Compte tenu de la valeur expérimentale réduite de γ_M , on peut exprimer l'arc MM' de deux façons :

MM' = γ_M . x = ρ . α .soit $\gamma_M = \frac{\alpha}{x}.\rho$

Dans (1) nous avons vu que : $\gamma_M = \frac{\tau_M}{G}$ et nous savons également que $\theta = \frac{\alpha}{x}$ définit l'angle unitaire de torsion .Par conséquent :

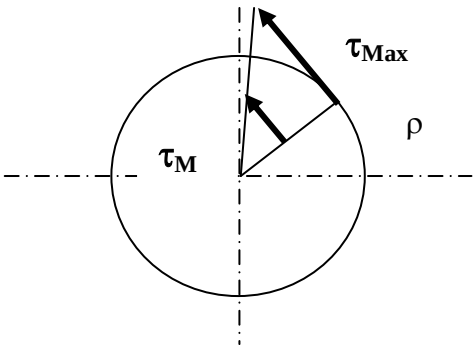
$$\frac{\tau_M}{G} = \theta . \rho$$

et

$$\boxed{\tau_M = G.\theta.\rho \quad \begin{cases} \tau_M : N/mm^2 \\ G : N/mm^2 \\ \theta : rad/mm \\ \rho : mm \end{cases}} \qquad (7)$$

*Nous pouvons remarquer que pour **G** et **θ** constantes, la contrainte tangentielle τ_M est proportionnelle à la distance ρ du point M à la fibre moyenne.*

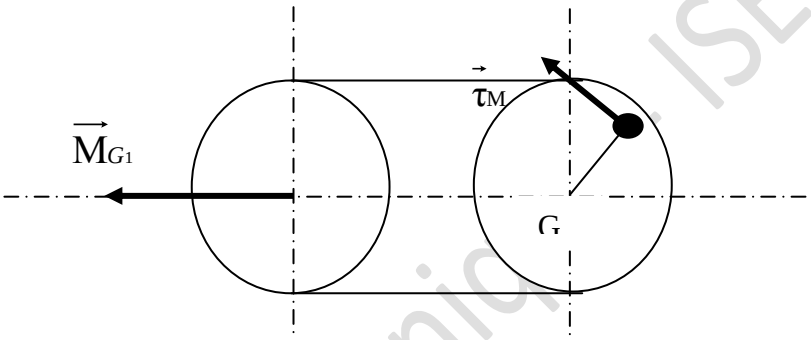
Genie Mécanique ISET Siliana



5.4 EQUATION DE DEFORMATION ELASTIQUE :

5.4.1 Relation entre le moment de torsion et la déformation angulaire :

Reprenons l'étude de l'équilibre du tronçon (1) de la poutre .Ce tronçon est compris entre la section d'encastrement (**S1**) et la section (**S**) d'abscisse **x** .



Projetons suivant l'axe Gx les vecteurs moments seront :

$-M_t + \sum_{(S)} \rho\, \tau_M\, \Delta S = 0$ et compte tenu de l'équation (7) on peut don écrire :

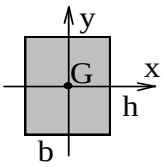
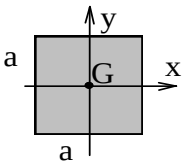
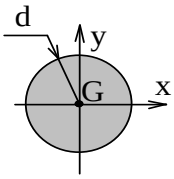
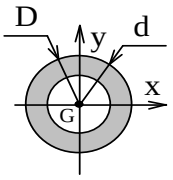
$$M_t = G\,\theta \sum_{(S)} \rho^2\, \Delta S \qquad (8)$$

Avec $\sum_{(S)} \rho^2\, \Delta S$ est le moment quadratique polaire de la section (S) par rapport à l'axe Gx portant les centres de gravité G des sections et noté : $I_0 = \sum_{(S)} \rho^2\, \Delta S = \sum_{(S)} x^2\, \Delta S = \sum_{(S)} y^2\, \Delta S$

$$I_0 = I_{0x} + I_{0y}$$

Dans ce tableau sont illustrés quelques moments quadratiques polaires utiles :

Genie Mécanique ISET Siliana

	I_{GX}	I_{GY}	$I_G = I_O$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(b^2+h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$

La relation (8) s'écrit alors :

$$Mt = G.\theta.I_o \qquad \begin{cases} Mt : \text{N mm} \\ G : \text{N / mm}^2 \\ \theta : \text{rad / mm} \\ I_o : \text{mm}^4 \end{cases} \qquad (9)$$

5.4.2 Equation de rigidité :

Pour certains arbres de grande longueur (sondes de forage, arbre de grands navire, etc ….), on doit éviter les trop grandes déformations de torsion (vibrations).Pour assurer une rigidité convenable à la transmission, on impose généralement une limite à l'angle unitaire de torsion :

$$\theta \leq \theta_{limite}$$

5.5 CONDITION DE RESISTANCE :

5.5.1 Expression de la contrainte de torsion :

L'expression : $\tau_M = G.\theta.\rho$ Nous donne la contrainte en un point M, d'une section droite, situé à la distance ρ de la fibre neutre.

Genie Mécanique - ISET Siliana

L'expression $Mt = G.\theta.I_o$ nous donne l'équation de déformation élastique de la poutre.

On peut écrire la contrainte en fonction du moment de torsion dans la section

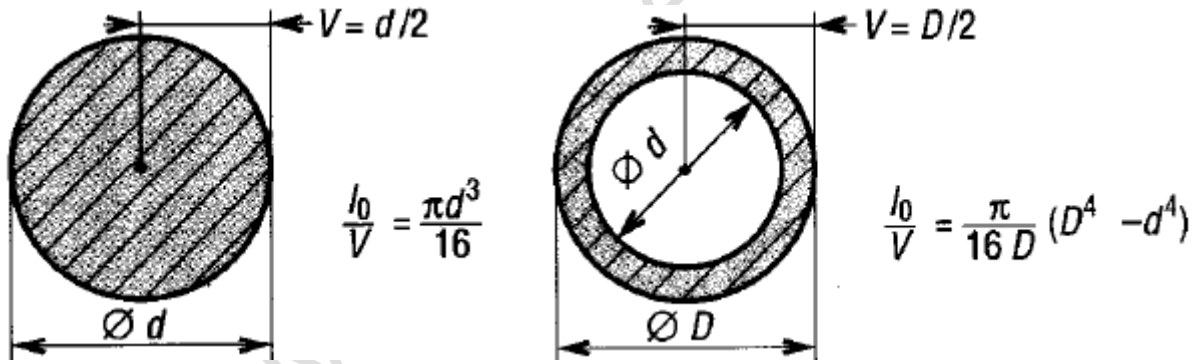
$$\boxed{\tau_M = \rho \frac{Mt}{I_o}}$$

5.5.2 Contrainte maximale de torsion :

Désignons par υ la valeur maximale de ρ.(Le plus souvent υ = R , rayon de la poutre cylindrique) nous écrivons alors :

$$\tau_{max} = \frac{Mt_{max}}{\frac{I_o}{v}}$$

Avec $\frac{I_O}{v}$ c'est le module de torsion (mm^3)



5.5.3 - Condition de résistance à la torsion :

$$\tau_{max} \leq \tau_p$$

τp : la contrainte pratique avec : $\tau_P = \frac{\tau e}{s}$

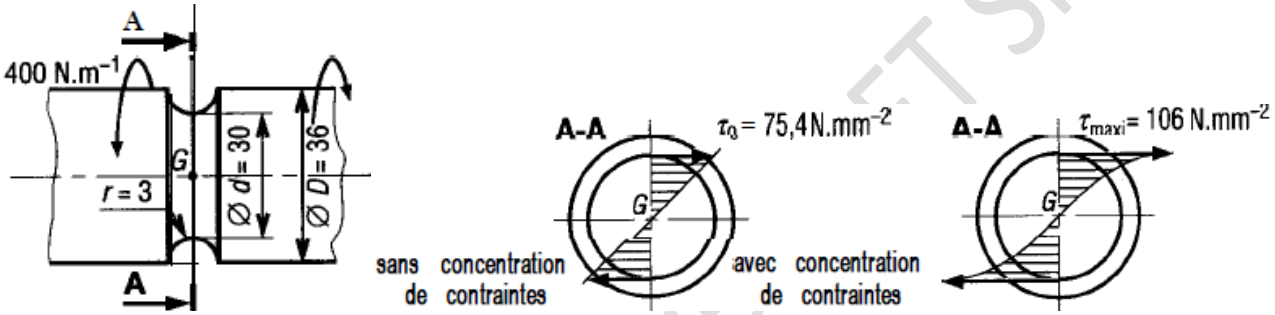
τe : la contrainte limite élastique (= **Re/2 cas de TRESCA et =** $Re/\sqrt{3}$ **cas de VON MISES).**

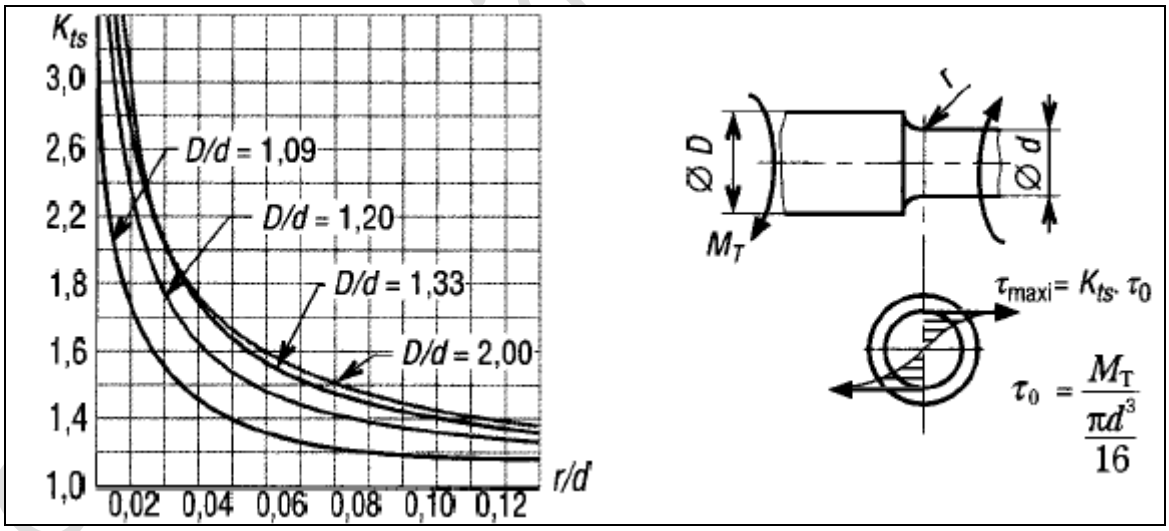
s : coefficient de sécurité

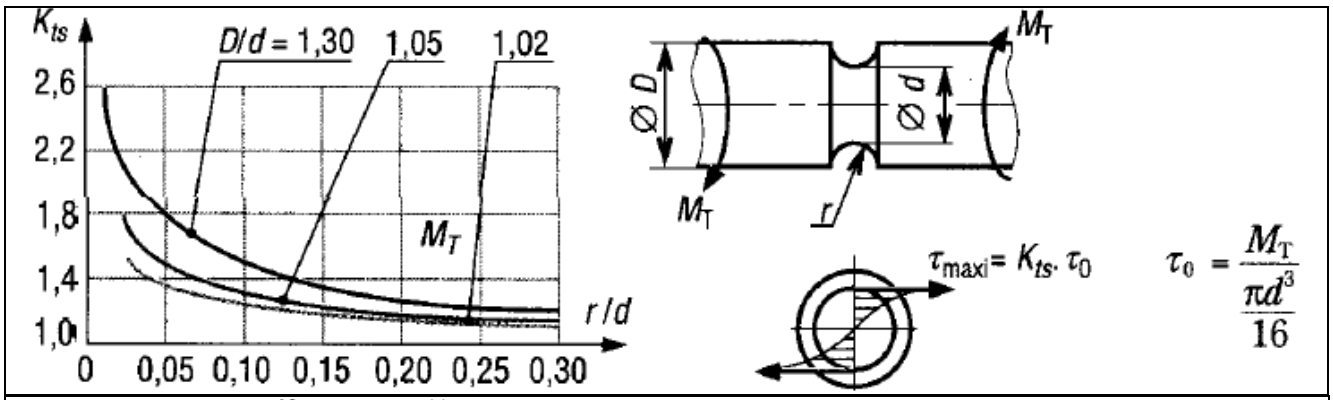
5.6 Concentration des contraintes

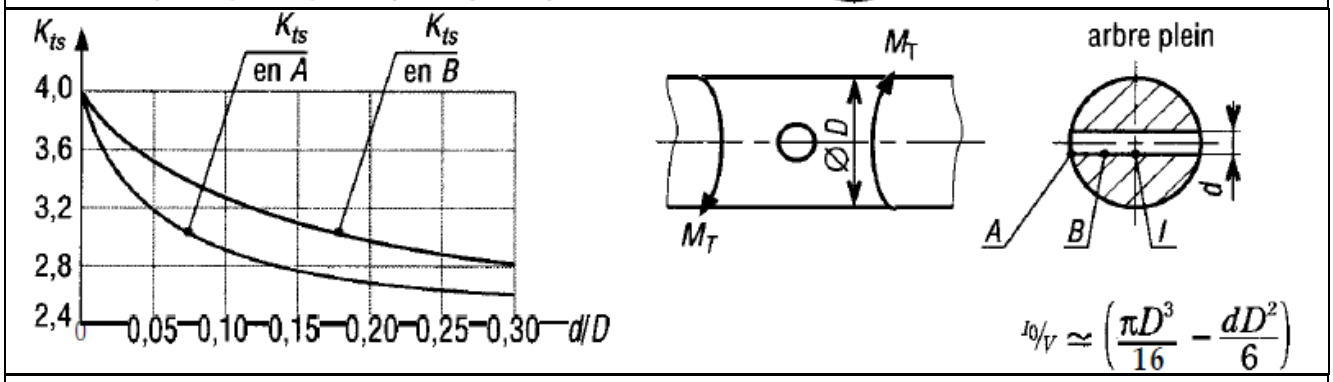
Lorsque les arbres étudiés présentent de brusques variations de section (gorge, épaulement, trou, ..), les formules précédentes ne sont plus applicables. Au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes est modifiée, τ_{max} est supérieur à τ calculée, on dit qu'il y a concentration de contraintes. Si K_t est le coefficient de concentration de contrainte :

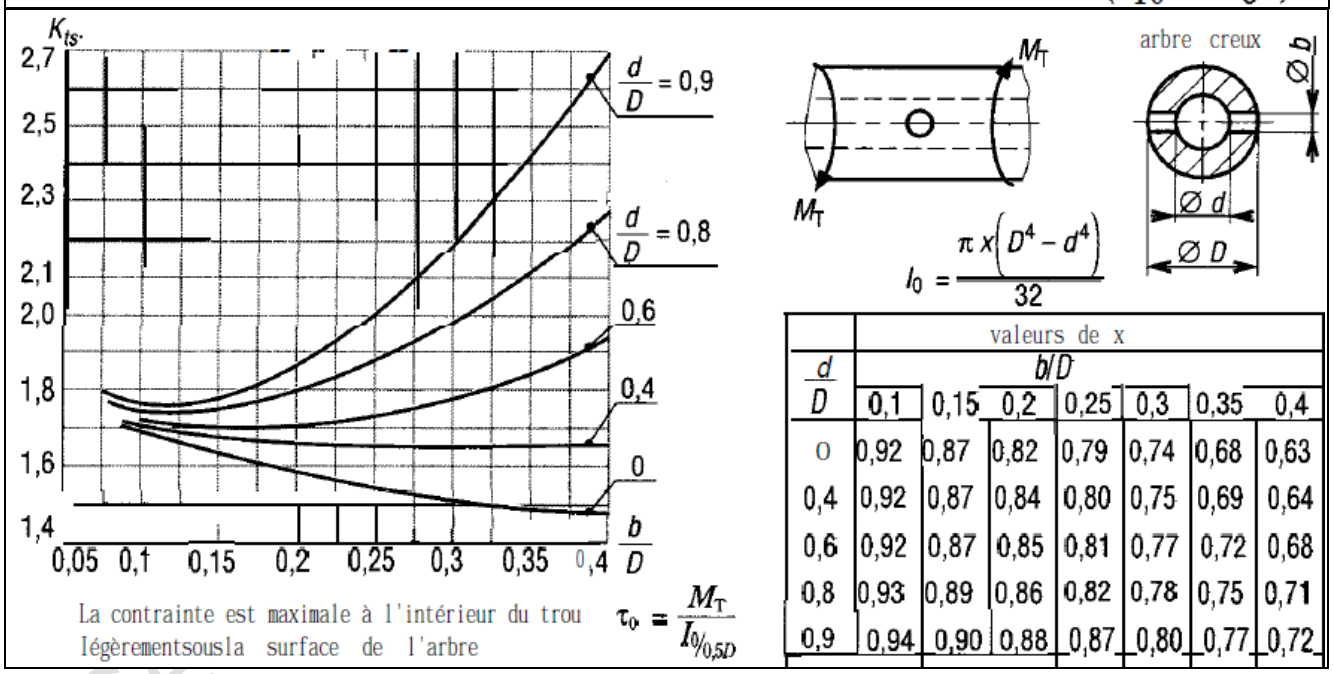
$$\tau_{max} \leq K_t . \tau$$











$\frac{d}{D}$	valeurs de x b/D						
	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
0	0,92	0,87	0,82	0,79	0,74	0,68	0,63
0,4	0,92	0,87	0,84	0,80	0,75	0,69	0,64
0,6	0,92	0,87	0,85	0,81	0,77	0,72	0,68
0,8	0,93	0,89	0,86	0,82	0,78	0,75	0,71
0,9	0,94	0,90	0,88	0,87	0,80	0,77	0,72

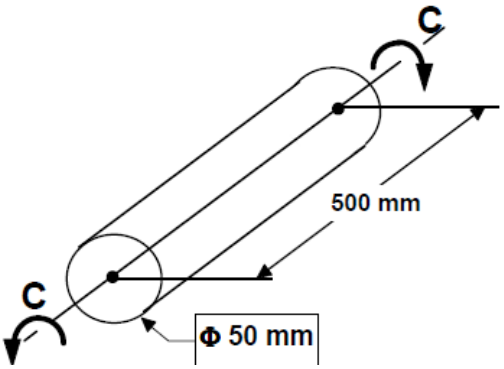
Exercices avec correction :

1 Un cylindre est soumis a un couple de torsion C=2.5 kNm. Le module de COULOMB du matériau vaut 78 GPa. Calculez:

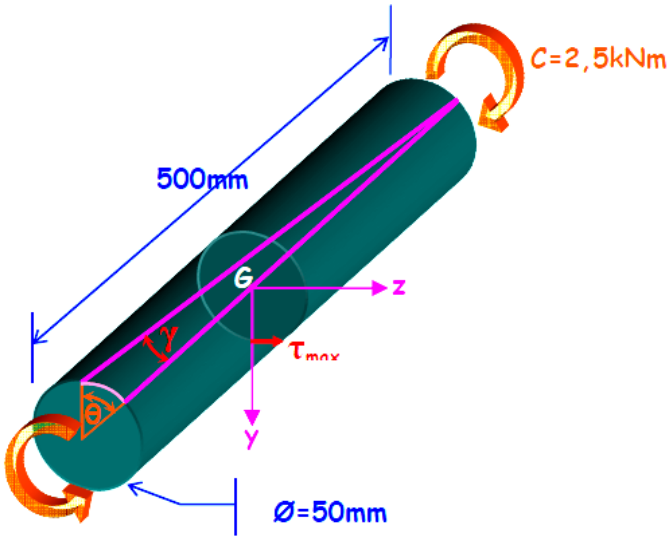
a) la contrainte tangentielle maximum dans le cylindre.

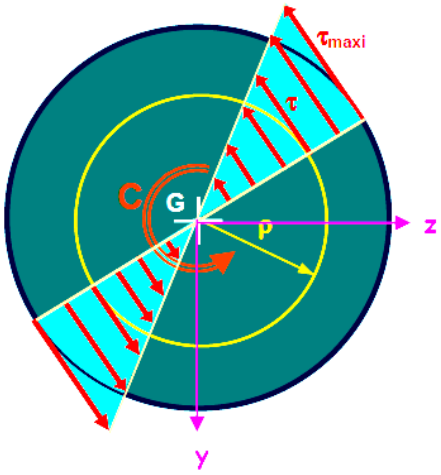
b) b) la distorsion des génératrices en rd et en °.

c) l'angle de rotation des sections extrêmes en °.



Correction :





a) Le moment de torsion M_x est constant tout le long de la barre. $M_x = C$

Considérons une section quelconque G : $\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R$ avec $I_G = \frac{\pi D^4}{32}$

$$\tau_{\max i} = \frac{2.5.10^6 \times 25 \times 32}{\pi \times 50^4} \qquad \tau_{max} = 101,86 \text{ MPa}$$

b) Appliquons la loi de Hooke en torsion : $\tau = G\gamma$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{101,86}{78.10^3} \qquad \gamma = 1,305.10^{-3} \text{ rd} = 0,0748°$$

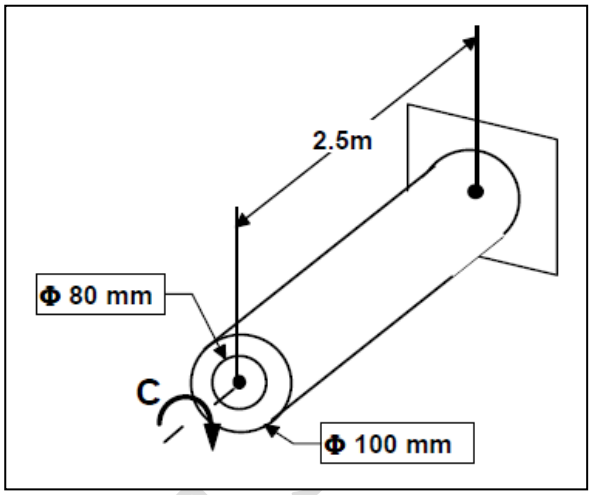
c) L' angle de rotation des sections extrêmes nous est donné par la relation : $\theta_x^{\max i} = \frac{M_x L}{G I_G}$

$$\theta_x = \frac{2.5.10^6 \times 500 \times 32}{78.10^3 \times \pi \times 50^4} \qquad \theta = 0,0261 \text{ rd} = 1°50$$

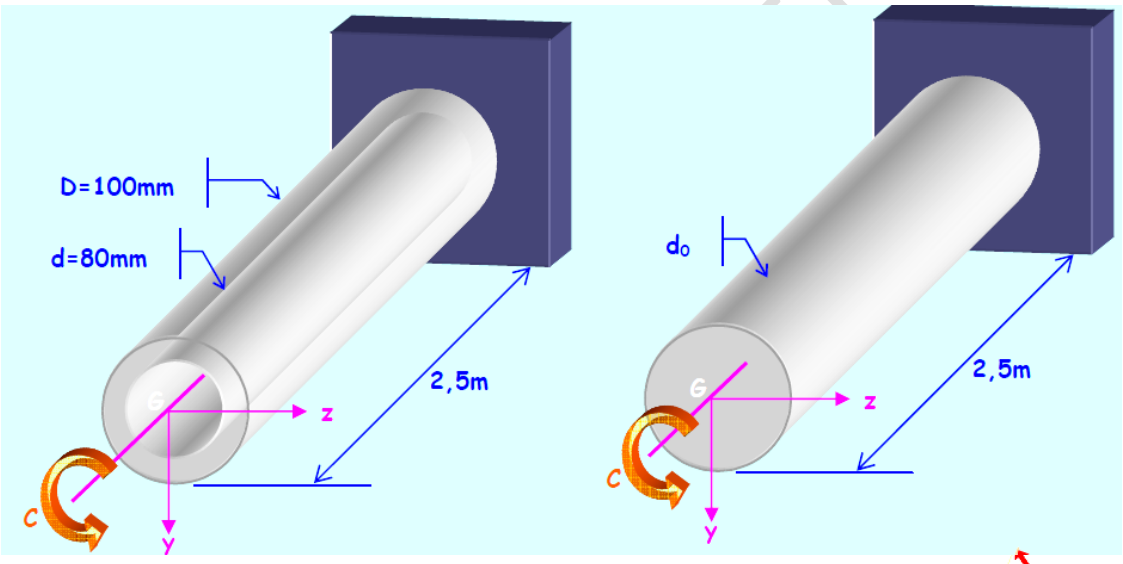
2

Calculez le couple C qui provoque une rotation des sections extrêmes du tube de 2° sachant que G = 27 GPa. En déduire la contrainte tangentielle maximum.

b) Calculez, pour d'un cylindre de même poids que le tube et qui supporte le même couple, l'angle de rotation des sections extrêmes et la contrainte tangentielle maximum.



Correction :

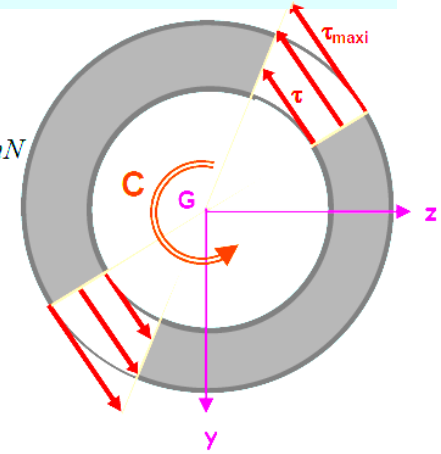


a) $\theta_x^{max\,i} = \dfrac{M_x L}{G I_G}$ avec $I_G = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$ et $\theta_{rd} = \dfrac{\theta^\circ \times \pi}{180}$

$$M_x = \frac{G I_G \theta_x^{max\,i}}{L} = \frac{27.10^3 \times \pi \times (100^4 - 80^4) \times 2 \times \pi}{32 \times 180 \times 2{,}5.10^3} = 2185130 mmN$$

C = 2185,13mN

$$\tau_{max\,i} = \frac{C}{I_G} R = \frac{2185{,}13.10^3 \times 100 \times 32}{2 \times \pi \times (100^4 - 80^4)}$$ **τ_{max} = 18,85 MPa**



b) Même poids implique même volume donc même aire

$$A = A_0 \Rightarrow \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \Rightarrow d_0 = \sqrt{100^2 - 80^2} = 60mm$$

$$\theta_x^{max\,i} = \frac{M_x L}{G I_G} = \frac{2185{,}13.10^3 \times 2500 \times 32}{27.10^3 \times \pi \times 60^4}$$ **θ_{max}= 0,159rd = 9°11**

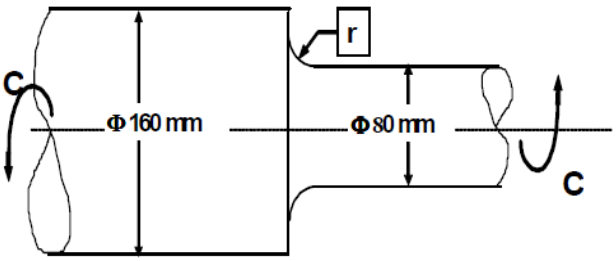
$$\tau_{max\,i} = \frac{C}{I_G} R = \frac{2185{,}13.10^3 \times 30 \times 32}{\pi \times 60^4}$$ **τ_{max}= 51,52 MPa**

3

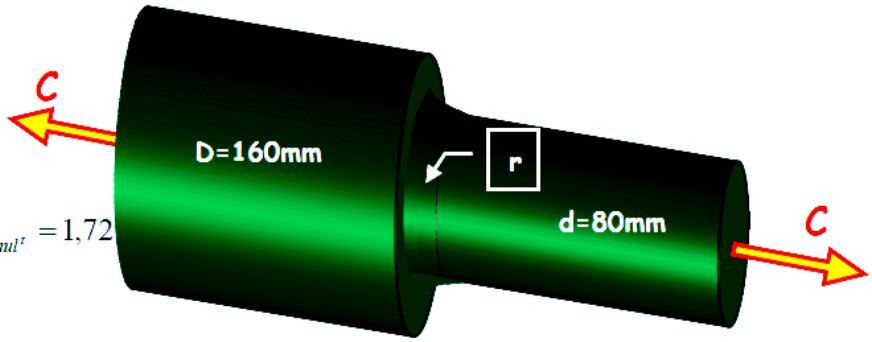
Un arbre épaulé tourne à 900 tr/mn. La contrainte tangentielle admissible vaut 55 MPa. Calculez:

a) la puissance transmise en kW si r=4mm.

b) le gain de puissance si r=10mm.



Correction



a) r=4mm

$$K_{epaul^t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{d} = \dfrac{160}{80} = 2 \\ \dfrac{r}{d} = \dfrac{4}{80} = 0{,}05 \end{cases} \qquad K_{epaul^t} = 1{,}72$$

$$\tau_{\max i} = K\frac{C}{I_G}\frac{d}{2} \Rightarrow C = \frac{2\tau_{\max i} I_G}{Kd} = \frac{55\times\pi\times 80^4}{32\times 1{,}72\times 40} = 3214653 mmN$$

C=3214,65mN

$$P = C\omega \qquad \text{avec } \omega = \frac{\pi N}{30}$$

La puissance s'exprimant en Watt, le couple en mN et la rotation angulaire en radian par seconde.

$$P = \frac{3214{,}65\times\pi\times 900}{30} = 302974 W$$

P=303kW

b) r=10mm

$$K_{epaul^t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{d} = \dfrac{160}{80} = 2 \\ \dfrac{r}{d} = \dfrac{10}{80} = 0{,}125 \end{cases} \qquad K_{epaul^t} = 1{,}35$$

$$P = \frac{303\times 1{,}72}{1{,}35} = 386 kW \quad \Rightarrow \quad Gain = \frac{386-303}{303}\times 100$$

$G_{\%}$=27,4%

4

Un arbre de torsion tubulaire de diamètre extérieur D, de diamètre intérieur d, de longueur 1200mm, est sollicite par un couple de 2000 mN. Sous l'action de ce couple, l'angle de torsion total de l'une des extrémités par rapport à l'autre doit être de 20°± 0.5°. La contrainte

maximum admissible en torsion est de 400 MPa. Le module de COULOMB du matériau vaut 80 GPa.

1) Calculer la distorsion angulaire maximum en radians en appliquant la loi de HOOKE.

2) En déduire le diamètre extérieur D en mm (arrondir le résultat au mm).

3) Quel est alors le diamètre intérieur d en mm (arrondir le résultat au mm).

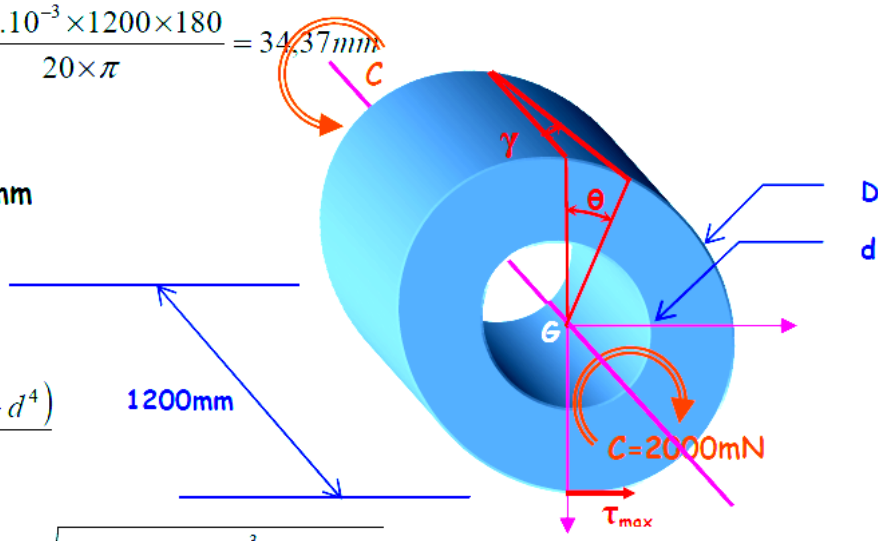
4) Avec les valeurs trouvées en 2) et 3) calculer la contrainte maximum de torsion (en MPa) et l'angle de torsion des sections extrêmes (en °).

Correction :

1) $\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{400}{80.10^3}$ **γ=5.10^{-3}rd**

2) $\gamma = \frac{\theta D}{2L} \Rightarrow D = \frac{2\gamma L}{\theta} = \frac{2\times 5.10^{-3}\times 1200\times 180}{20\times\pi} = 34{,}37mm$

En arrondissant au mm : **D=34mm**



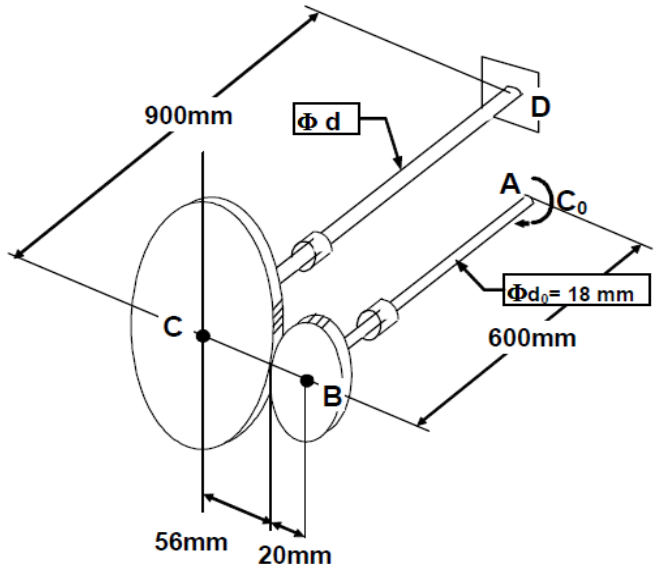
3) $\tau_{max\,i} = \frac{C}{I_G}R$ avec $I_G = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$

$$400 = \frac{2000.10^3\times 17\times 32}{\pi\times(34^4 - d^4)} \Rightarrow d = \sqrt[4]{34^4 - \frac{2000.10^3\times 17\times 32}{400\times\pi}} = 26{,}19mm$$

En arrondissant au mm : **d=26mm**

4) $\tau_{max} = \frac{2000.10^3\times 17\times 32}{\pi\times(34^4 - 26^4)}$ **τ_{max} = 393,83 MPa**

$\theta_x^{max\,i} = \frac{M_x L}{GI_G} = \frac{2000.10^3\times 1200\times 32}{80.10^3\times\pi\times(34^4 - 26^4)}$ **θ_{max}= 0,347rd = 19°91**



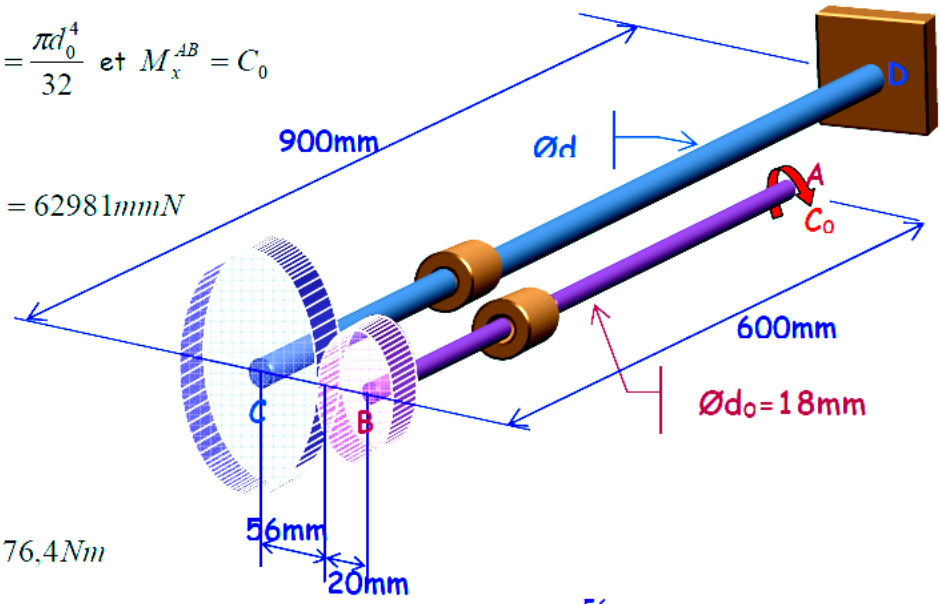
La contrainte tangentielle maximum dans les arbres AB et CD vaut 55 MPa. Calculez:

a) la valeur du couple C_0.

b) le diamètre d.

c) la rotation de la section droite A (en °) par rapport à la section droite D sachant que G= 80 GPa.

Correction :

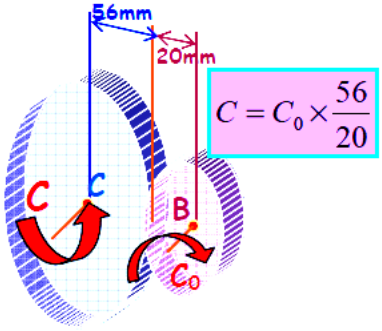


a) $\tau_{\max i} = \dfrac{M_x^{AB}}{I_G^{AB}} \dfrac{d_0}{2}$ avec $I_G^{AB} = \dfrac{\pi d_0^4}{32}$ et $M_x^{AB} = C_0$

$$C_0 = \frac{\tau_{\max i} I_G^{AB}}{\frac{d_0}{2}} = \frac{55 \times \pi \times 18^4}{32 \times 9} = 62981 mmN$$

C_0 = 63 Nm

b) $C = C_0 \times \dfrac{56}{20} = 63 \times \dfrac{56}{20} = 176{,}4 Nm$



$$C = C_0 \times \frac{56}{20}$$

$\tau_{\max i} = \dfrac{M_x^{CD}}{I_G^{CD}} \dfrac{d}{2}$ avec $I_G^{CD} = \dfrac{\pi d^4}{32}$ et $M_x^{CD} = C$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 176{,}4.10^3}{\pi \times 55}} = 25{,}37$$

d = 25,4 mm

c) $\theta_{AB} = \dfrac{M_x^{AB} L^{AB}}{G I_G^{AB}}$; $\theta_{CD} = \dfrac{M_x^{CD} L^{CD}}{G I_G^{CD}}$

$$\theta_{A/D} = \theta_A = \theta_{CD} \times \frac{56}{20} + \theta_{AB} = \left(\frac{176{,}4.10^3 \times 900 \times 32}{80.10^3 \times \pi \times 25{,}4^4} \times \frac{56}{20} + \frac{63.10^3 \times 600 \times 32}{80.10^3 \times \pi \times 18^4} \right) = 0{,}1818 rd$$

θ_A= 10°42

TD Torsion

Exercice 1 :

On considère l'arbre de transmission de puissance représenté sur la figure 1. Cet arbre est supporté par deux paliers à roulements à billes à chacune de ses extrémités (non représentés sur la figure). Les moments de torsion M_{t1}, M_{t2} et M_{t3} s'applique au milieu des tronçons. L'arbre est entraîné en rotation par le moment M_{t1} à la vitesse ***constante*** de 3000 tr/min et transmet une puissance de 40 kW. Les moments M_{t2} et M_{t3} dus aux organes récepteurs sont égaux.

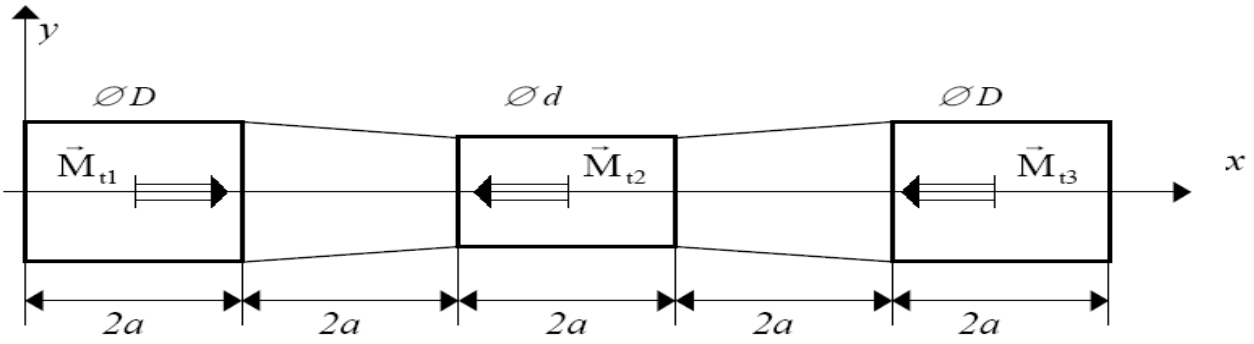


Figure 1

1/ Donner les équations et tracer le graphe du moment de torsion le long de cet arbre.

2/ Tracer le graphe représentant la contrainte tangentielle maximale le long de cet arbre.

3/ Déterminer les diamètres *D* et *d* ainsi que l'angle de rotation entre les sections extrêmes de cet arbre.

Données : $d = 0.8D$; $a = 50$ mm ; $R_{pg} = 100$ MPa ; G = 80 000 MPa.

Exercice 2 :

On veut entraîner une simultanément 3 machines a l'aide des poulies, 1, 2 et 3 sur un arbre lui-même entraîné par une poulie motrice M clavetée sur l'arbre. Les trois poulies réceptrices exercent sur l'arbre des couples résistants respectivement égaux a 400 N.m, 300 N.m et 200 N.m

1 – tracer le graphe du moment de torsion le long de cet arbre.

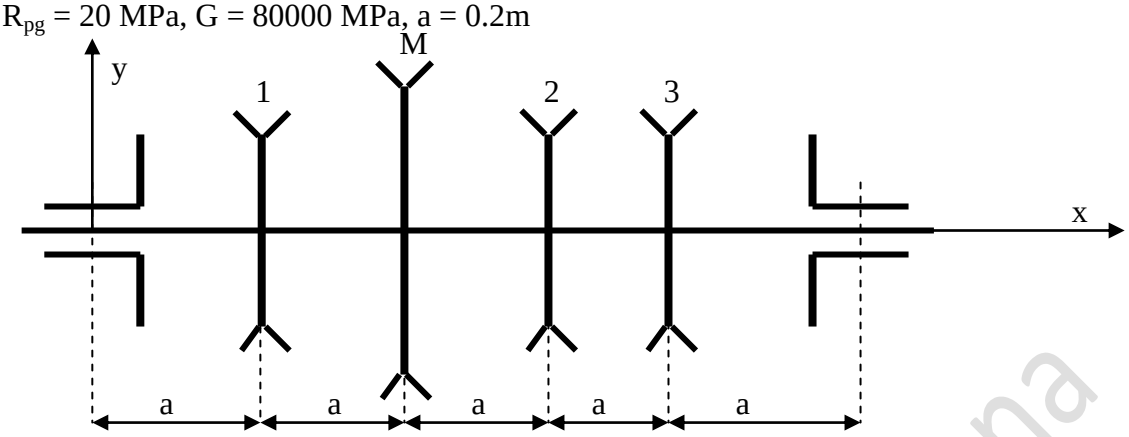
2 – calculer le diamètre de l'arbre plein permettant de transmettre le mouvement.

3 – calculer les dimensions d'un arbre creux de même résistance et de poids moitié.

4 – calculer l'angle de torsion unitaire maximal de ces deux arbres.

5 – tracer le graphe de l'angle de rotation des sections de l'arbre. De quel angle ont tourné les sections droites extrêmes de l'arbre plein et de l'arbre creux.

On donne : R_{pg} = 20 MPa, G = 80000 MPa, a = 0.2m



Genie Mécanique - ISET Siliana