# Chapitre 4. Dynamique des fluides incompressibles

## 1/- Théorème d'Euler ou des quantités de mouvement :

### 1-1/ Principe :

Ce théorème établit une relation entre les éléments cinématiques d'un fluide et les efforts qui lui sont appliqués. La somme vectorielle des forces appliquées à un tronçon de fluide en écoulement permanent est égale au produit du débit massique par la différence vectorielle des vitesses du fluide en aval et en amont de ce tronçon.

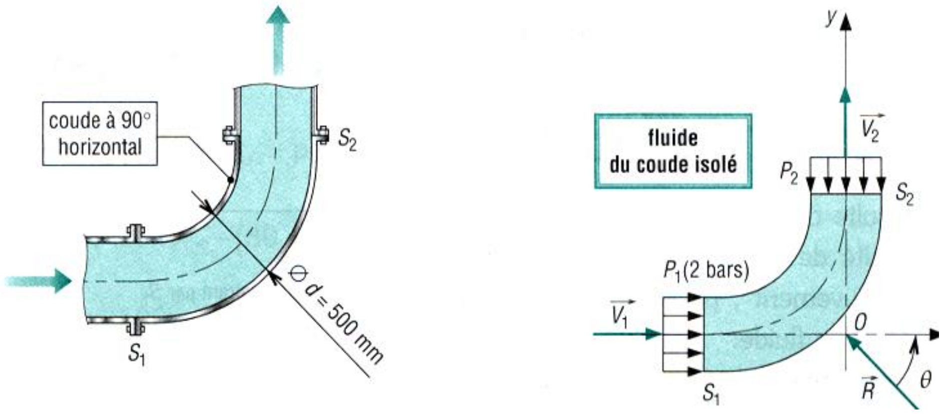


Figure 18: Théorème d'Euler

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = q_m.(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Où :

$\Sigma\vec{F}_{ext}$ : La somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un tronçon de fluide isolé (N).

$q_m$ : Le débit massique du fluide (kg/s).

$\vec{v}_1$ : La vitesse vectorielle du fluide à l'aval (m/s).

$\vec{v}_2$ : La vitesse vectorielle du fluide à l'amont (m/s).

### 1-2/ Application :

Dans la pratique on trouve plusieurs applications du théorème de d'Euler notamment les jets pour entrainer les turbines et la propulsion des fusées.

## 2/- Théorème de BERNOULLI :

### 2-1/ Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible :

Un fluide parfait est un fluide dont l'écoulement se fait sans frottement.

On considère un écoulement permanent isovolume d'un fluide parfait, entre les sections $S_1$ et $S_2$, entre lesquelles il n'y a aucune machine hydraulique (pas de pompe, ni de turbine).

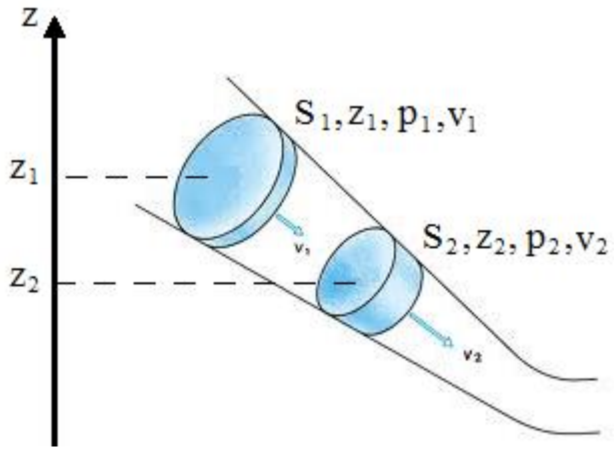


Figure 19: Fluide en écoulement entre deux points (1) et (2)

Soit **m** la masse et **V** le volume du fluide qui passe à travers la section $\mathbf{S_1}$ entre les instants **t** et **t+Δt**. Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section $\mathbf{S_2}$. Tout se passe comme si ce fluide était passé de la position (1) à la position (2).

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants **t** et **t+Δt** (la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient :

$$\rho\frac{v^2}{2} + \rho g z + p = Cte$$

p : Pression statique.

$\rho g z$ : Pression de pesanteur.

$\rho\frac{v^2}{2}$ : Pression cinétique.

Tous les termes exprimés en pascal.

En divisant tous les termes de la relation précédente par le produit **ρg**, on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pressions exprimées en mètres de colonne de fluide).

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g} = H = Cte$$

Avec :

**H** est la Hauteur totale, $\frac{P}{\rho g}$ est la Hauteur de Pression, z est la cote, $\frac{v^2}{2g}$ est la Hauteur cinétique,

$z + \frac{P}{\rho g}$ est la Hauteur piézométrique.

### 2-2/ Cas d'un écoulement (1) → (2) sans échange de travail :

Lorsque, dans un écoulement d'un fluide parfait, il n'y a aucune machine (ni pompe ni turbine) entre les points (1) et (2) d'une même ligne de courant, la relation de Bernoulli peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = 0$$

Ou $$\frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + (z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} = 0$$

### 2-3/ Cas d'un écoulement (1)→(2) avec échange de travail:

Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique, il échange de l'énergie avec cette machine sous forme de travail **ΔW** pendant une durée **Δt**.

La puissance **P** échangée est : $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

Avec : P en watt (W) ; W en joule (J) ; t en seconde (s).

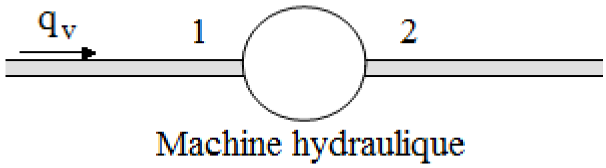


Figure 20: Ecoulement avec échange de travail

Si **p** > **0 :** l'énergie est reçue par le fluide (exemple : pompe) ;

Si **p**< **0 :** l'énergie est fournie par le fluide (exemple : turbine).

Si le débit-volume est $q_v$, la relation de Bernoulli s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{P}{q_v}$$

## 3/- Application du Théorème de Bernoulli :

### 3-1/ Tube de Pitot :

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en **A** face au courant, et l'autre en **B** le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur.

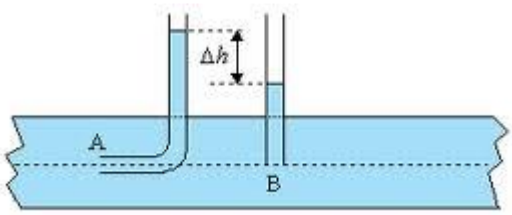


Figure 21: Tube de Pitot

Au point **B**, le liquide a la même vitesse **v** que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide $\mathbf{p_B = p}$.

En **A**, point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est $p_A$.

D'après le théorème de Bernoulli,

$$p_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = p_A \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = \rho \cdot g \cdot h$$

En mesurant la dénivellation **h** du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse **v** d'écoulement du fluide.

### 3-2/ Tube de Venturi :

Une conduite de section principale $\mathbf{S_A}$ subit un étranglement en B où sa section est $\mathbf{S_B}$. La vitesse du fluide augmente dans l'étranglement, donc sa pression y diminue : $\mathbf{v_B > v_A \Rightarrow p_B < p_A}$

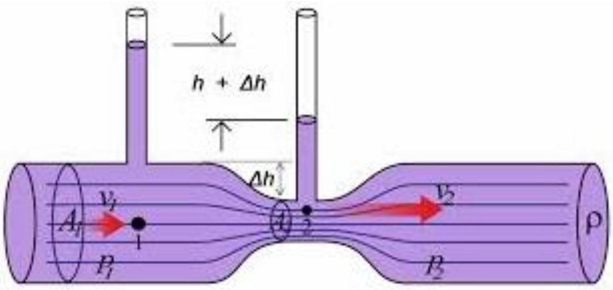


Figure 22: Tube de Venturi

Le théorème de Bernoulli s'écrit ici :

$$p_A + \frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 = p_C + \frac{1}{2}\rho \cdot v_C^2$$

D'après l'équation de continuité, $v_B S_B = v_A S_A = q_v$ et $v_B > v_A$ donc $p_A > p_B$

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho.(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}).q^2 = k.q^2$$

La différence de pression aux bornes des extrémités du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit.

### 3-3/ Ecoulement d'un liquide contenu dans un réservoir - Théorème de Torricelli

Considérons un réservoir muni d'un petit orifice à sa base, de section S et une ligne de courant partant de la surface au point (1) et arrivant à l'orifice au point (2). En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2)

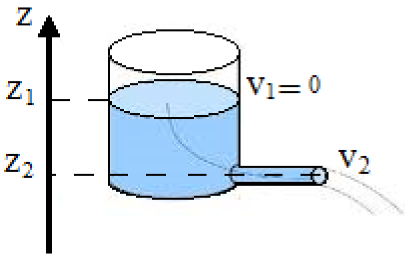


Figure 23: Théorème de Torricelli

$$\rho\cdot\frac{v_1^2}{2}+\rho\cdot g\cdot z_1+p_1=\rho\cdot\frac{v_2^2}{2}+\rho\cdot g\cdot z_2+p_2$$

Or $p_1 = p_2$ = pression atmosphérique, $z_1$-$z_2$ = $h$ et $v_1$<<$v_2$.

D'où La vitesse d'écoulement est la même que la vitesse de chute libre entre la surface libre et l'orifice, quelle que soit la masse volumique du liquide.

$$v_2=\sqrt{2\cdot g\cdot h}$$