CHAPITRE III : DYNAMIQUE **DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES**

Pré-requis :

Généralités sur les fluides et l'hydrostatique.
Théorème de l'énergie cinétique

Objectifs spécifiques :

A la fin de ce chapitre l'étudiant doit être capable d'appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible avec ou sans échange d'énergie.

CHAPITRE III :

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

I – Généralités :

La dynamique des fluides est la science qui s'intéresse au comportement des fluides en mouvement.

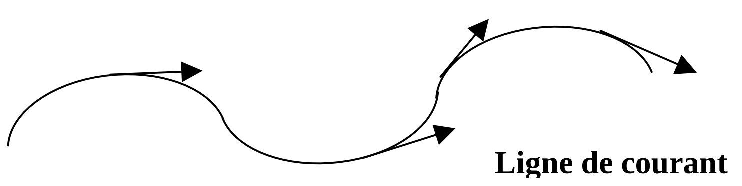
On considère que les fluides étudiés sont parfaits et incompressibles (On ne tiendra pas compte des effets de viscosité $\mu = 0$ et $\rho = cte$)

1) Ecoulement permanent ou stationnaire :

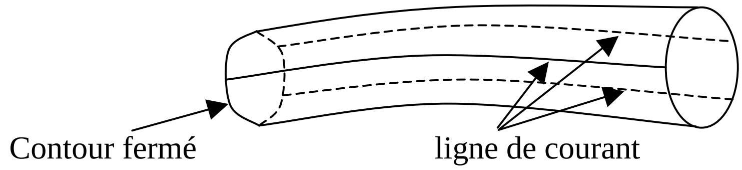
Un écoulement est dit permanent ou stationnaire, si les paramètres qui caractérisent le fluide (pression, vitesse, température, masse volumique) sont indépendants du temps en chacun des points de l'écoulement.

2) Ligne de courant, tube de courant :

Une ligne de courant est une ligne tangente en tous ces points au vecteur vitesse des particules qui se trouvent sur cette ligne au moment donné. L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé forme le tube de courant.



Tube de courant



Remarque :

En écoulement permanent, la ligne de courant et la trajectoire se coïncident.

3) Débit :

Le débit est la quantité de fluide écoulée pendant le temps t. La quantité peut être définie par un volume ou une masse. Par conséquent on défini alors :

- Débit volumique :

$$Q_v = \frac{\text{volume}}{\text{temps}} \qquad \text{en } [m^3/s]$$

- Débit massique :

$$Q_m = \frac{\text{Masse}}{\text{temps}} \qquad \text{en } [Kg/s]$$

- On a : ρ = masse / volume $\longrightarrow$ $\boxed{Q_m = \rho \,.\, Q_v}$

- Autre définition du débit :

Pour un fluide traversant une section S avec un vecteur vitesse $\vec{V}$

$Q_v = \iint_S \vec{V}\,\vec{n}\,ds$ $\quad \vec{n}$ vecteur unitaire normal à S

Dans la pratique on s'intéresse à la vitesse moyenne V_m dans une section donnée.

$$\boxed{Q_v = V_m.S}$$

La vitesse moyenne V_m est appelée aussi vitesse débitante

$$V_m = \frac{Q_v}{S}$$

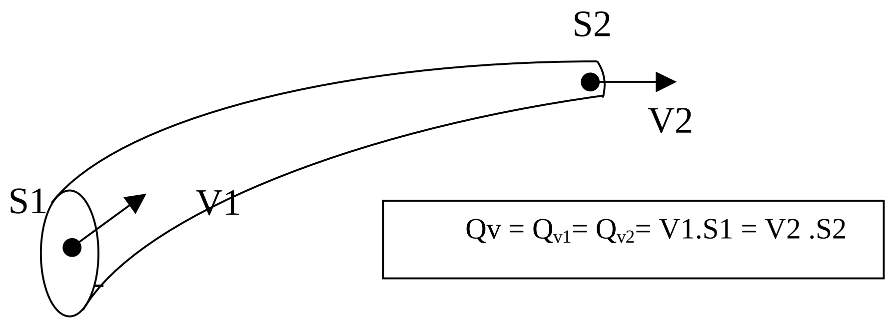
V_m : vitesse moyenne (m/s)

Q : Débit volumique (m^3/s)

S : section (m^2)

II – Conservation du débit :

Le long d'un tube de courant, le débit volumique d'un fluide incompressible se conserve.



Puisque le fluide est incompressible ρ = cte :

$$Q_m = \rho \, . \, Q_v \longrightarrow Q_m = Q_{m1} = Q_{m2} = \rho \, .V_1.S_1 = \rho \, .V_2.S_2$$

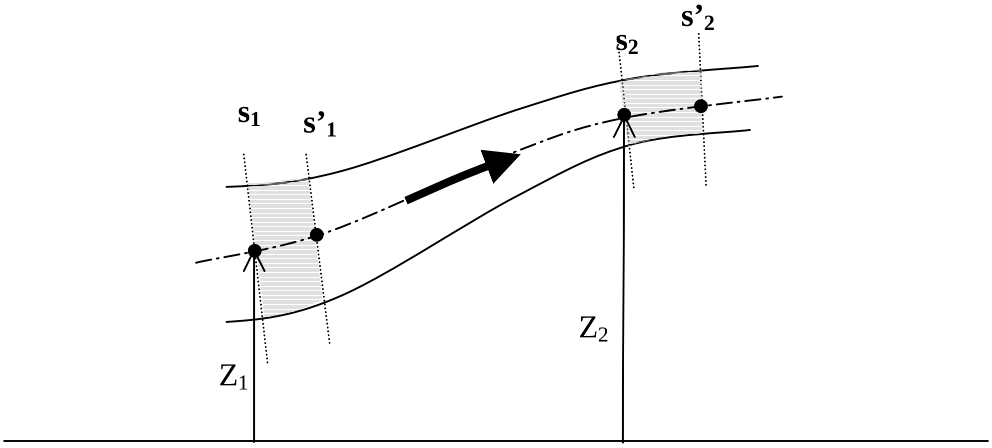
III – Théorème de BERNOULLI :

1) Théorème de Bernoulli :

Soit un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible dans une conduite .Les deux section S_1 et S_2 délimitent à l'instant t une certaine masse de fluide .Les caractéristiques du fluide à l'instant t sont :

- En S_1 : ρ , v_1 , p_1 et z_1
- En S_2 : ρ , v_2 , p_2 et z_2

A l'instant (t + dt), cette masse se déplace et se trouve entre deux sections S'$_1$ et S'$_2$. On A donc dm = dm$_1$= dm$_2$



Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à dm : (La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures)

⇨ $$\Delta E_c(dm) = \sum W_{1\rightarrow 2}$$

La variation de l'énergie cinétique : $\Delta E_c(dm) = \frac{1}{2} dm(v_2{}^2 - v_1{}^2)$

Travail de force de pesanteur : Wp = $(z_1 - z_2).g.dm$

Travail des forces intérieures est nul car le fluide est parfait ($\mu = 0$)

Travail des forces de pression : Sur S$_1$: W_{p1}= Fp$_1$.x$_1$ = $p_1.S_1.v_1.dt$

Sur S$_2$: W_{p2}= - Fp$_2$.x$_2$ = $- p_2.S_2.v_2.dt$

Sur surface latérale : $W_{pL} = 0$

⇨ $$\frac{1}{2} dm(v_2{}^2 - v_1{}^2) = p_1.S_1.v_1.dt - p_2.S_2.v_2.dt + (z_1 - z_2).g.dm$$

⇨ $$\frac{1}{2} dm\rho.(v_2{}^2 - v_1{}^2) = p_1.\rho S_1.v_1.dt - p_2.\rho S_2.v_2.dt + (z_1 - z_2).\rho.g.dm$$

Or, d'après l'équation de conservation du débit : $dm = \rho.S_1.v_1.dt = \rho.S_2.v_2.dt$

Donc $\frac{1}{2} dm.\rho.(v_2{}^2 - v_1{}^2) = p_1.dm - p_2.dm + (z_1 - z_2).\rho.g.dm$

$$\boxed{p_1 + \rho.g.z_1 + \rho\frac{v_1{}^2}{2} = p_2 + \rho.g.z_2 + \rho\frac{v_2{}^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p+\rho.g.z+\rho\frac{v^2}{2}=Cte} \quad \text{en } (P_a) \qquad (1)$$

Les termes de cette équation sont des énergies par unité de volume (J/m^3), ce sont aussi des termes de pression (P_a).

En effet, $1J/\ m^3 = 1N\ m/m^3 = 1N/m^2 = 1P_a$

Donc le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie par unité de volume.

- **p** : Pression statique : C'est la grandeur que l'on mesure par exemple par un manomètre ou l'énergie potentielle de pression/ unité de volume.
- **ρgz** : Energie potentielle de position par unité de volume
- $\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho V^2}$: Energie cinétique par unité de volume ou pression dynamique

La quantité ($p+\rho gz+\frac{1}{2}\rho V^2$) est appelée aussi la charge du fluide.

2) Autres formes du théorème de Bernoulli :

- En divisant toute l'expression (1) par ρg , on obtient :

$$\boxed{z+\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\rho.g}=Cte} \quad (\text{ en m })$$

Tous les termes sont des hauteurs unité le mètre (m) ou de l'énergie par unité de poids. (J/N = N.m/N = m)

- En divisant toute l'expression (1) par ρ , on obtient :

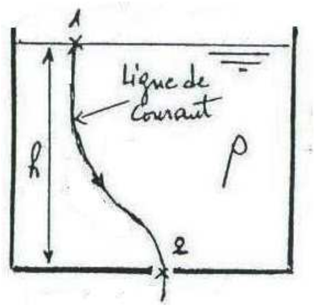
$$\boxed{\frac{1}{2}v^2+g.z+\frac{p}{\rho}=Cte} \quad (\text{ en J/kg })$$

Tous les termes sont des énergies par unité de masse.

3) Application du théorème de Bernoulli :

a- Vitesse de vidange d'un réservoir

Grand réservoir de section S
Petit orifice de vidange de section s.
Hypothèse : S>>s
Niveau constant h= cte



Le long de la ligne de courant on applique le théorème de Bernoulli :

$$p_1+\rho g z_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2+\rho g z_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2$$

La vitesse de vidange est $V = V_2$

$$V_2^2 = \frac{2(p_1-p_2)}{\rho} + 2g\,(z_1-z_2) + V_1^2$$

Réservoir ouvert à l'air libre $p_1 = p_{atm}$
Sortie du liquide à l'air libre $p_2 = p_{atm}$
$z_1-z_2 = h \quad \forall$ plan de référence

D'où $V_2^2 = 2gh + V_1^2$

Puisqu'il y a écoulement $V_2 \neq 0$

La conservation du débit donne $Q = V_1 S = V_2 s$

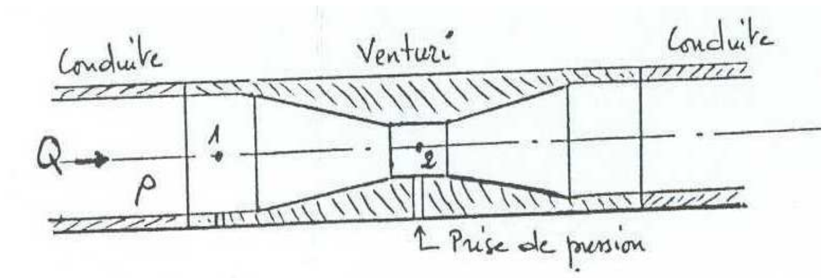
$$\left.\begin{array}{l} V_1 = V_2 \dfrac{s}{S} \\ S >> s \rightarrow \dfrac{s}{S} \rightarrow 0 \end{array}\right\} \quad V_1 \rightarrow 0 \text{ d'où } V_1^2 = 0$$

$V_2^2 = 2gh$

La vitesse de vidange est donc $\boxed{V = \sqrt{2gh}}$: Formule de Torricelli

En réalité, la vitesse de vidange est plus faible, elle dépend de la viscosité et la forme de l'orifice de vidange.

b- Mesure du débit dans une conduite à l'aide du tube de VENTURI



$$p_1+\rho g z_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2+\rho g z_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$Q = V_1S_1 = V_2S_2 \rightarrow V_2=V_1 \frac{S_1}{S_2}$$

$$\frac{1}{2}\rho\,(V_2^2 - V_1^2) = p_1-p_2 +\rho g\,(z_1-z_2)$$

Dans ce cas : $z_1-z_2 = 0$ conduite horizontale

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 -1\right] = p_1 - p_2$$

$$V_1^2 = \frac{2(p_1-p_2)}{\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 -1\right]}$$

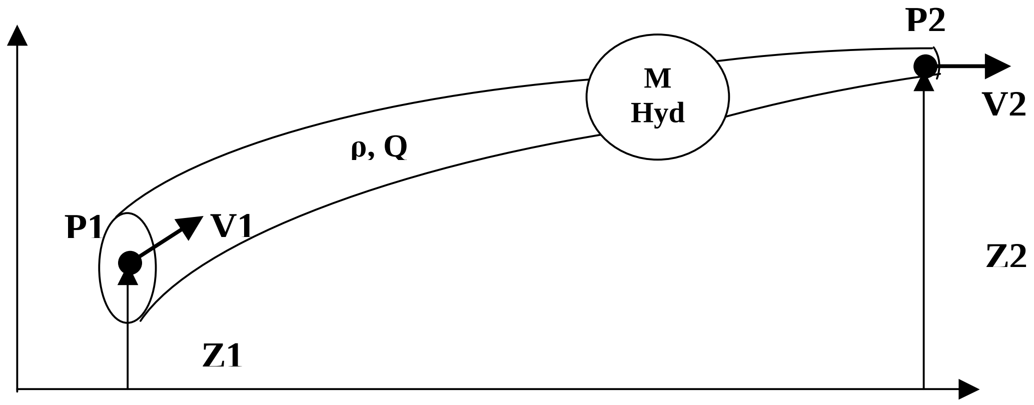
On connaît les caractéristiques des sections S_1 et S_2.

Il suffit de mesurer la différence de pression (p_1-p_2) grâce à un tube en U contenant un liquide manométrique, on aura le débit volumique :

$$\boxed{Q = S_1\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 -1\right]}}}$$

V- Fluide parfait traversant une machine hydraulique :

1) conservation de l'énergie :



Machine hydraulique : { * Réceptrice : turbine
* Génératrice : pompe

La turbine transforme l'énergie hydraulique du liquide en énergie mécanique.
La pompe transforme l'énergie mécanique fournie par un moteur en énergie hydraulique.
Concéderons une machine hydraulique parcourue par un débit Q d'un fluide de masse volumique ρ.La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\boxed{p_1+\rho g z_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2+\rho g z_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2 \pm E}$$

E : Quantité positive (unité : Pascal), c'est l'énergie par unité de volume fournie par une pompe au liquide ou absorbée par une turbine.

On écrira : { + E pour une M. réceptrice
- E pour une M. Génératrice

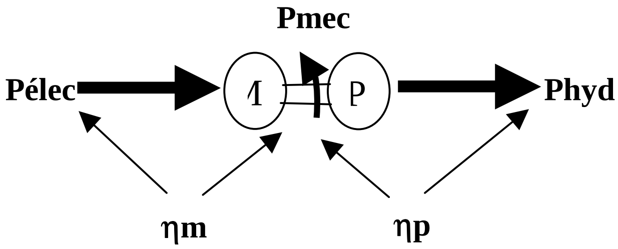
2) Puissance mise en jeu :

- Puissance hydraulique :

$$\boxed{P_{hyd} = E \times Q}$$

(w) (Pa) (m^3/s)

- Cas d'une pompe :



η_m et η_p sont respectivement les rendement du moteur électrique et de la pompe

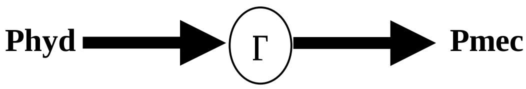
Puissance mécanique :

$$\boxed{P_{mec} = P_{hyd} / \eta_p} \quad (w)$$

Puissance électrique :

$$\boxed{P_{élec} = P_{mec} / \eta_m = P_{hyd} / (\eta_p . \eta_m) = E.Q / (\eta_p . \eta_m)} \quad (w)$$

- Cas d'une turbine



$$\boxed{P_{méca} = P_{hyd} \, . \, \eta_T} \quad (w)$$

η_T : Rendement de la turbine

Remarque :

Pour les applications numériques, on doit utiliser les unités du S.I., mais le résultat final peut être donné dans un autre système.
Quand on applique la conservation de l'énergie :

- *on doit respecter le sens de l'écoulement*
- *on peut travailler avec les pressions effectives ou absolues (si p_1 est effective alors p_2 doit être effective et si p_1 est absolue alors p_2 doit être absolue)*