Chapitre 2 : Erreurs et Incertitudes de mesure

1. Introduction :

Aucune mesure n'est parfaite. Quelque soit le soin apporté à sa mise en œuvre, la précision de l'appareil, la compétence de l'opérateur, le respect des règles de manipulation et de contrôle sévère de tous les paramètres d'influence, il restera toujours une incertitude sur la mesure, aussi infinie soit-elle. C'est pourquoi toute mesure, pour être complète, doit comporter la valeur mesurée et les limites de l'erreur possible sur la valeur donnée.

2. Nature des erreurs

- ✓ ***L'erreur systématique*** : erreur reproductible liée à la loi physique qui régit la grandeur mesurée, aux conditions d'utilisation de l'appareil de mesure (calibre, erreur de parallaxe,…), aux différentes erreurs introduites dans la chaine de mesure. On peut y remédier par un bon réglage de zéro, un bon étalonnage et une appréciation de la fraction de division, en tenant compte des erreurs de méthode dans la mesure en les calculant.

- ✓ ***L'erreur aléatoire :*** erreur non reproductible (exemple du bruit). Pour remédier à ces erreurs, il suffit que les montages soient clairs et soignés et les paramètres mis en jeu soient bien connus et maîtrisés. En effet, il suffit d'utiliser un bon oscilloscope possédant un réglage qui permet d'éliminer la rotation du faisceau.

On peut aussi réduire ces erreurs en faisant une série de mesures et en calculant la valeur moyenne arithmétique.

- ✓ ***L'erreur accidentelle*** *:* mauvais emploi, mauvais serrage ou disfonctionnement de l'appareil.

3. Caractéristiques des instruments de mesure

- ✓ *Gamme de mesure :* ensemble des valeurs du mesurande pour lesquelles un instrument de mesure est supposé fournir une mesure correcte.
- ✓ *Etendue de mesure* : différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la gamme de mesure.

- ✓ *Classe de précision* : valeur en % du rapport entre la plus grande erreur possible et l'étendue de mesure.

$$classe\ (\%) = 100\ \frac{plus\ grande\ erreur\ possible}{étendue\ de\ mesure}$$

- ✓ *Résolution* : pour les appareils de mesure numériques, on définit la résolution par :

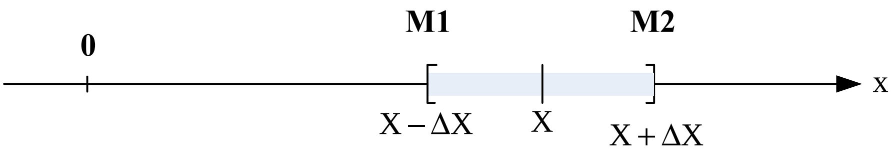
$$résolution = \frac{étendue\ de\ mesure}{nombre\ de\ points\ de\ la\ mesure}$$

- ✓ *Rapidité, temps de réponse* : aptitude d'un instrument à suivre les variations de la grandeur à mesurer.
- ✓ *Bande passante* : bande de fréquence pour laquelle le gain de l'instrument est supérieur ou égal à au gain maximal / √2.

4. Les incertitudes de mesure des appareils analogiques

On appelle incertitude de mesure ΔX, la limite supérieure de la valeur absolue de l'écart entre la valeur mesurée et la valeur exacte de la mesurande notée $\Delta \boldsymbol{X} = \boldsymbol{sup}|\boldsymbol{\varepsilon}| = \boldsymbol{sup}|\boldsymbol{X_{mes}} - \boldsymbol{X_{éxact}}|$.

C'est un paramètre associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.



La valeur réelle se trouve nécessairement entre les points M_1 et M_2, dans l'intervalle de confiance.

En pratique cette incertitude ne peut être qu'estimée. On distingue deux types :

- ✓ ***Incertitude absolue*** $\Delta \boldsymbol{X}$ qui a la même unité que la grandeur mesurée
- ✓ ***Incertitude relative*** $\Delta \boldsymbol{X}/\boldsymbol{X}$ qui s'exprime en %.

a. Les incertitudes de mesure des méthodes directe :

La grandeur inconnue est déterminée par lecture directe de la déviation de l'appareil de mesure.

Exemples : - pour mesurer une puissance, on utilise un wattmètre,

- pour mesurer une résistance on utilise un ohm-mètre.

i. Incertitude absolue instrumentale pour un appareil à déviation:

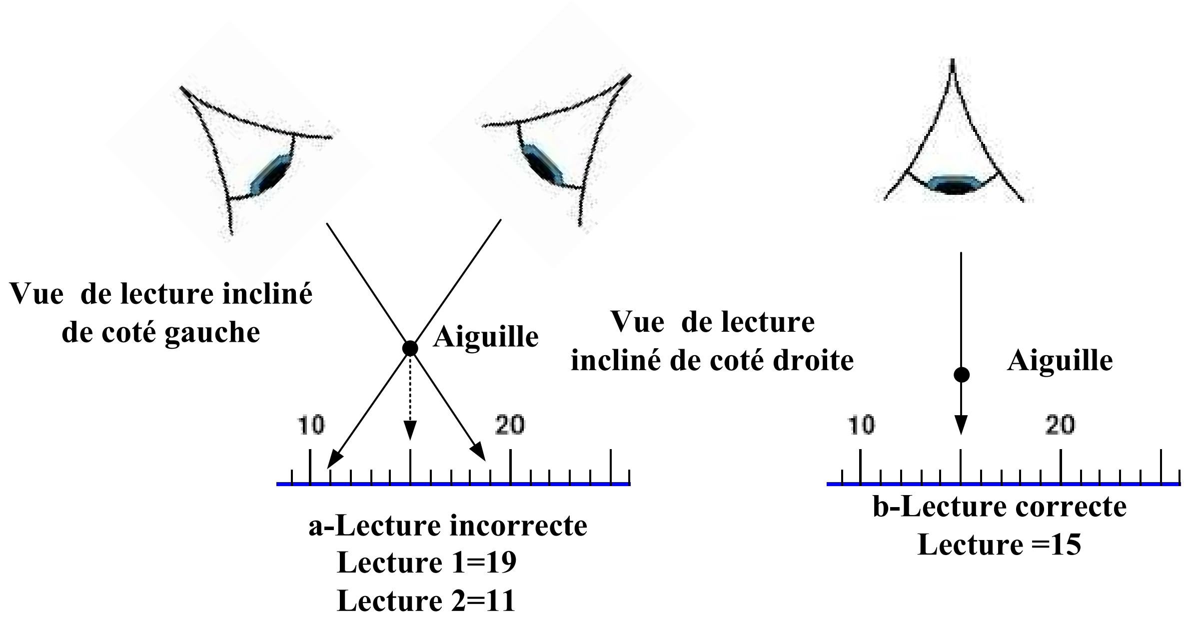
L'incertitude instrumentale est l'incertitude due à l'appareil de mesure. Elle est fonction de la précision de l'appareil.

Cette incertitude instrumentale est donnée par l'expression suivante :

$$\Delta X_{inst} = \frac{classe\,.\,calibre}{100}$$

ii. Incertitude absolue de lecture

L'incertitude de lecture est due soit à une mauvaise vue, soit de mauvaises conditions de la lecture. Par exemple, si l'expérimentateur effectue toujours ses lectures la tète penchée sur la côté gauche ou droite il lira toujours une valeur supérieure ou inférieure à celle qui est indiquée. Pour éviter ce genre d'erreurs, dites de parallaxe, certains appareils de mesure électriques comportes un miroir sous l'aiguille A. Pour effectuer une bonne lecture, nous devons nous placer de telle façon que l'aiguille A masque totalement son image A'. Cette incertitude n'existe pas pour les appareils numériques.



Généralement l'erreur de lecture est estimable à $\frac{1}{4}$ de division :

L'incertitude absolue de lecture : $\Delta X_{lect} = \frac{1}{4}\frac{calibre}{échelle}$

iii. Incertitude absolue totale

C'est la somme des incertitudes précédentes :

$$\Delta X_{tot} = \Delta X_{inst} + \Delta X_{lect} = \frac{classe\,.calibre}{100} + \frac{1}{4}\frac{calibre}{échelle}$$

Exemple : on mesure la tension directement avec un voltmètre.

Soit un voltmètre analogique à les caractéristiques suivantes : Cl=1.5 et N=100 pour :

1) Cal=30V et lecture : $n = 80$
2) Cal=300V et lecture **:** $n = 8$

Calculer pour chaque calibre :

a) La tension U ;

b) L'incertitude instrumentale $\frac{\Delta U_{inst}}{U}$ **:**

c) L'incertitude de lecture $\frac{\Delta U_{lect}}{U}$ **;**

d) Déduire l'incertitude absolue pour chaque calibre

3) Choisir le calibre adéquat.

Solution :

1) Sur le calibre : $30V$ on a n=80

a) $U = \frac{Cal \times n}{N} = \frac{30 \times 80}{100} = 24V$

b) $\frac{\Delta U_{inst}}{U} = \frac{Cl \times N}{100n} = \frac{1.5 \times 100}{100 \times 80} = 0.01875 = 1.875\%$

c) $\frac{\Delta U_{lect}}{U} = \frac{1}{4n} = \frac{1}{4 \times 80} = 0.003125 \simeq 0.3\%$

d) $\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta U_{inst}}{U} + \frac{\Delta U_{lec}}{U} = 0.01875 + 0.003125 = 0.021875 \simeq 2.19\%$

e) $\Delta U = \left(\frac{\Delta U}{U}\right) U = 0,021875 \times 24 = 0,525\,V$

2) Sur le calibre $300V$ on a n=8 :

a) $U = \frac{Cal \times n}{N} = \frac{300 \times 8}{100} = 24V$

b) $$\frac{\Delta U_{inst}}{U}=\frac{Cl\times N}{100n}=\frac{1.5\times 300}{100\times 8}=0.5625\simeq 56,252\%$$

c) $$\frac{\Delta U_{lect}}{U}=\frac{1}{4n}=\frac{1}{4\times 8}=0.03125=3.125\%$$

d) $$\frac{\Delta U}{U}=\frac{\Delta U_{inst}}{U}+\frac{\Delta U_{lect}}{U}=0.5625+0.03125=0.59375\approx 59,375\%$$

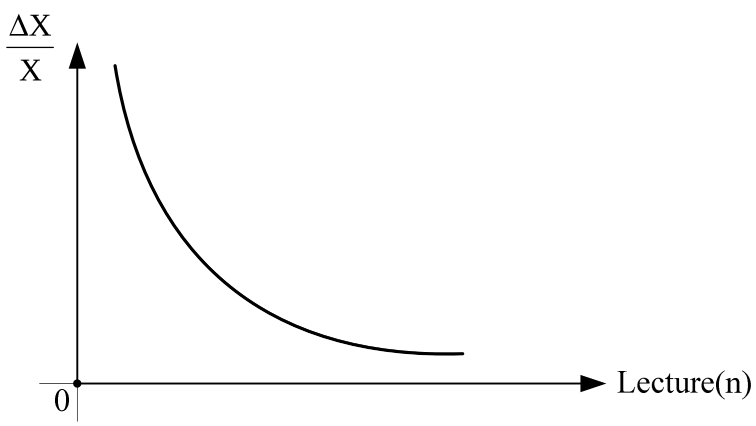
e) $$\Delta U=\left(\frac{\Delta U}{U}\right)U=0,59375\times 24=14,25\,\text{V}$$

3) Donc pour la mesure de tension, on doit choisir le calibre 30V dont les incertitudes absolue et relative sont inferieures à celles du calibre 300V.

Remarque :

L'expression de l'incertitude relative, calculée à partir de la lecture et du nombre total de déviation, montre que la courbe : $\frac{\Delta X}{X}=f\left(n\right)$, n représentant le nombre de division correspondant à la lecture en divisions, est une hyperbole équilatérale identique pour tous les calibres (figure ci-dessous, il en résulte que :

- ✓ Dans la première moitié de la graduation l'incertitude relative prend une valeur importante et souvent inadmissible ;
- ✓ Comme conclusion, pour utiliser aux mieux un appareil de mesure et minimiser l'incertitude, il faut le brancher sur le calibre correspondant à la plus grande déviation possible.



b. Les incertitudes de mesure pour les méthodes indirecte :

La mesure est appelée indirecte si la grandeur mesurée X est calculée à partir des résultats des mesures directes de plusieurs grandeurs intermédiaires$(a, b, \dots, z)$.

Cette méthode consiste à utiliser deux ou plusieurs appareils de mesure. La grandeur inconnue est déterminée par une expression mathématique qui fait intervenir les grandeurs mesurées.

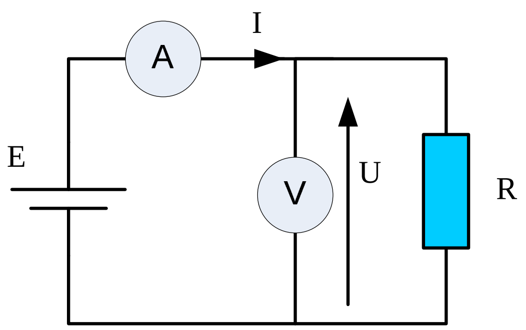
Exemple : pour mesurer une puissance, on mesure la tension U par un voltmètre et le courant I par un ampèremètre puis on calcule P = U.I.

Dans le cas où les appareils de mesure sont ampèremètre et voltmètre, la méthode est dite ***voltampèremétrique.***

Soit une fonction multivariable $X = f(a, b, \dots, z)$

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z$$

Exemple : considérons le montage suivant :



1) On effectue les mesures suivantes $I = [17 \pm 0{,}1]mA \;\; et \;\; U = [7 \pm 0{,}5]V$

2) Calculer la valeur de R ;

a) Calculer l'incertitude absolue de R ;

b) Calculer l'incertitude relative de R ;

Réponse :

a- $R = \frac{U}{I} = 411,76\Omega$

b- $\Delta R = \left|\frac{\delta R}{\delta U}\right|\Delta U + \left|\frac{\delta R}{\delta I}\right|\Delta I$

- $\frac{\delta R}{\delta U} = \frac{1}{I} = 58,82$
- $\frac{\delta R}{\delta I} = -\frac{U}{I^2} = -24221,45$
- $\Delta R = \left|\frac{\delta R}{\delta U}\right|\Delta U + \left|\frac{\delta R}{\delta I}\right|\Delta I = 31,83\Omega$

c- $\frac{\Delta R}{R} = 0,077 = 7,7\%$

Règles particulières

- Somme : $f(x,y) = x + y \Rightarrow \Delta f = \Delta x + \Delta y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x+y}$
- Différence : $f(x,y) = x - y \Rightarrow \Delta f = \Delta x + \Delta y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x-y}$
- Produit : $f(x,y) = x.y \Rightarrow \Delta f = y.\Delta x + x.\Delta y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
- Quotient : $f(x,y) = \frac{x}{y} \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{y}\Delta x + \frac{x}{y^2}\Delta y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$

5. Précision des appareils numériques :

Pour les appareils numériques, les constructeurs fournissent une indication qui nous permet de calculer l'incertitude totale sur la mesure. Cette incertitude est très souvent donnée de la manière suivante : $\Delta X = \pm a\,\% * \text{valeur mesurée} \pm b * \text{résolution}$

- ✓ $a\%$: Donnée par le constructeur.
- ✓ $b\%$: Donnée par le constructeur.
- ✓ Résolution de l'appareil.

Exemple : Un appareil de mesure de gamme 2V et de résolution 1mV ; On a :

$\Delta U = \pm 0{,}1\% L \pm 2d$, (Avec : L : lecture ; d : digit ou unité). Calculer l'incertitude absolue pour une lecture L=1V

$\Delta U = 0{,}001 * 1V + 2 * 1mV = 3mV$; L'erreur absolue est donc de ± 3 mV.

Remarque : Pour les appareils à affichage numérique, il n'est pas tenu de calculer l'incertitude sur la lecture due à l'opérateur, cette incertitude est déjà prise en considération dans la précision de l'appareil.

6. Présentation d'un résultat de mesure et chiffres significatifs

Pour avoir un nombre correct de chiffres significatifs, il faut arrondir certains résultats et on garde le nombre de chiffres significatifs désiré :

- ✓ Si le chiffre délaissé $\varepsilon \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ on ajoute une unité au dernier chiffre signification.
- ✓ Si le chiffre délaissé $\varepsilon \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ on garde le dernier chiffre sans changement.

Exemple :

- 627.398 V : 6 chiffres significatifs ;
- 627.99 V : 5 chiffres significatifs ;
- 628V : 3 chiffres significatifs

7. Présentation des résultats de mesure

On peut écrire un résultat de mesure de deux manières différentes en utilisant l'incertitude absolue ou l'incertitude relative, tout en respectant le nombre de chiffres significatifs.

$X = \{X_{mes} \pm \Delta X_{tot}\}\ [unité]$ ou $X = X_{mes}\ [unité] \pm \frac{\Delta X_{tot}}{X}\ (\%)$

En général, un résultat de mesure donné avec **3 chiffres significatifs** suffit pour les mesures ordinaires en électricité.

Il est conseiller d'effectuer les calculs intermédiaires avec un nombre de chiffres significatifs plus élevé pour éviter les arrondis de calcul, par contre il faut arrondir le résultat final au même nombre de chiffres significatifs que celui adopté lors de la mesure initiale.

Un résultat de mesure ne peut pas être plus précis que la moins précise des mesures qui à permis son calcul.

Une incertitude est donnée avec au plus **deux chiffres significatifs** et n’est jamais écrite avec une précision plus grande que le résultat.