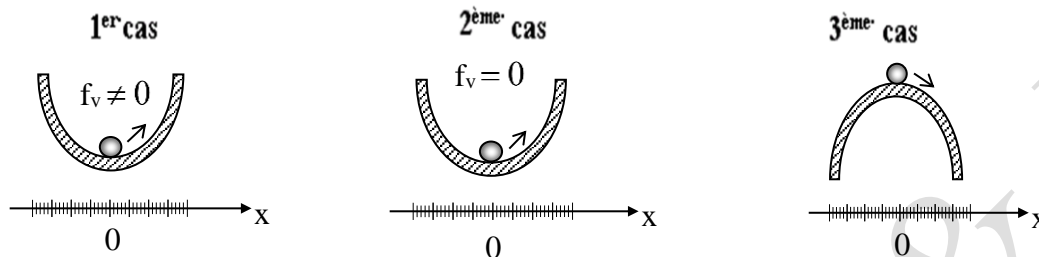


CHAPITRE I

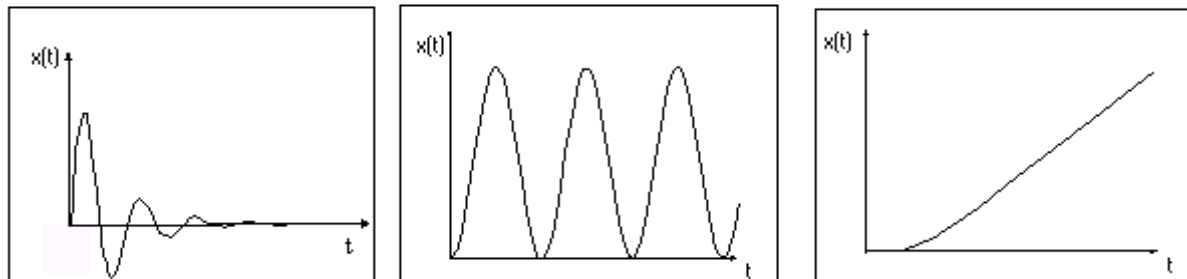
PERFORMANCES DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRE

I. STABILITE

Pour définir la stabilité des systèmes dynamiques, nous considérons les trois cas suivants:



Dans chaque cas la bille est poussée dans le sens de la flèche. On relève alors son déplacement suivant l'axe horizontal x . On trouve alors les résultats suivants:



- 1^{er} cas: → système stable.
- 2^{ème} cas: → Système juste instable.
- 3^{ème} cas: système instable (divergeant).

1 - Définition :

- Un système linéaire est stable lorsqu'il tend à revenir à sa position d'équilibre permanente quand on lui applique une perturbation de courte durée.
- Un système linéaire est stable si la réponse à toute entrée finie (bornée) implique une sortie bornée.

2 - Condition de stabilité:

Soit la fonction de transfert $H(p)$ suivante:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1) \cdot (p-p_2) \cdot \dots \cdot (p-p_n)}$$

L'équation $D(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$, est appelée l'équation caractéristique de $H(p)$

Théorème :

Un système est stable si toutes les racines de l'équation caractéristique $D(p)$ sont à partie réelle négative.

Remarque:

Le calcul des racines de l'équation caractéristique n'est pas toujours évident, d'où le recours à un critère algébrique (Critère de Routh) qui permet de conclure sur le signe de la partie réelle des racines de l'équation caractéristique.

1. Critère algébrique de stabilité : Critère de Routh:

1ère condition:

Tous les coefficients sont présents et de même signe.

2ème condition:

Connaissant $D(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$,

On représente le tableau de Routh suivant formé par $n+1$ lignes.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...	
p^{n-3}	c_{n-3}	c_{n-5}		...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p^0					

$$b_{n-2} = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3})}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5})}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{(b_{n-2} \cdot a_{n-3} - b_{n-4} \cdot a_{n-1})}{b_{n-2}}$$

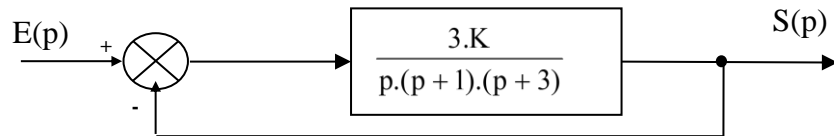
$$c_{n-5} = \frac{(b_{n-2} \cdot a_{n-5} - b_{n-6} \cdot a_{n-1})}{b_{n-2}}$$

Le système est stable si tous les termes de la première colonne du tableau de Routh sont **strictement positifs**.

Remarque: Le nombre de changement de signe dans la première colonne est égale au nombre de pôles de $H(p)$ (Racines de $D(p)=0$) à partie réelle positives.

2. Exemple:

Soit le système suivant:



Trouver la condition sur k pour que le système soit stable.

Solution : Soit H(p) la fonction de transfert en boucle fermée.

$$H(p) = \frac{3.k}{p.(p+1).(p+3) + 3.k} = \frac{3.k}{p^3 + 4.p^2 + 3.p + 3.k}$$

L'équation caractéristique est: $D(p) = p^3 + 4.p^2 + 3.p + 3.k$

1^{ère} condition: vérifiée si et seulement si: $k > 0$

2^{ème} condition:

P^3	1	3
P^2	4	3.k
P^1	$(12-3.k)/4$	0
P^0	3.k	

Pour que la deuxième condition soit vérifiée, il faut que: $12-3.k > 0$ et $3.k > 0$.

Pour que le système soit stable il faut que: $0 < k < 4$.

3. Critère graphique de stabilité :

Les critères graphiques de stabilité permettent d'étudier la stabilité d'un système à partir de l'étude fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte.

3.1. Critère du revers:(Utilisation du diagramme de Nyquist)

Dans le plan de Nyquist, le point critique a pour coordonnées (-1,0).

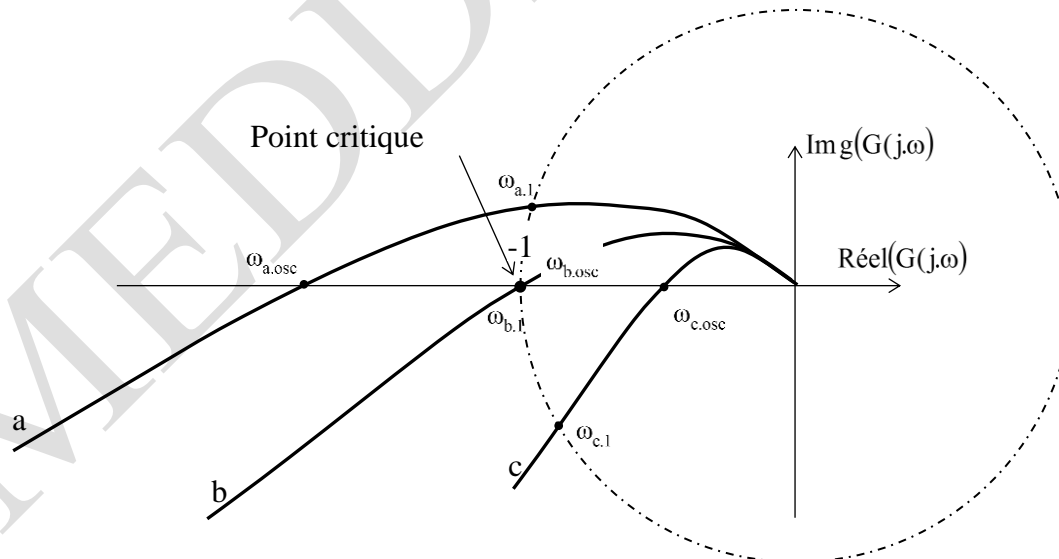


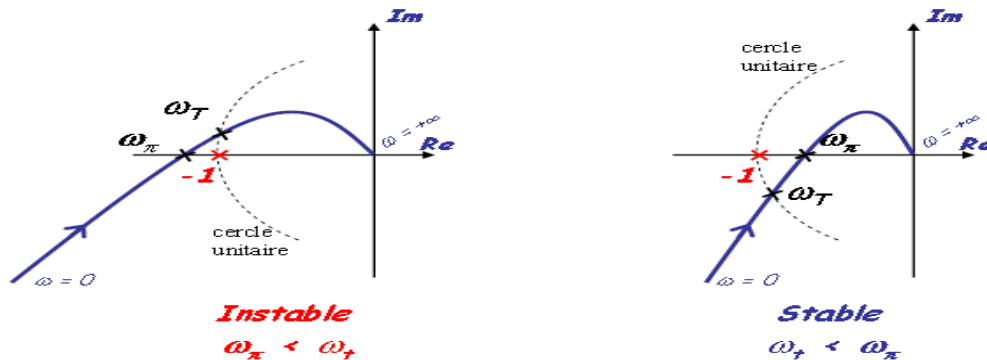
Figure I.1. Illustration du critère de revers

- **Système (a):** $\omega_{a,l} > \omega_{a,osc} \Rightarrow$ le système en boucle fermée est instable.
- **Système (b):** $\omega_{b,l} = \omega_{b,osc} \Rightarrow$ le système en boucle fermée est juste instable. oscillant
- **Système (c):** $\omega_{c,l} < \omega_{c,osc} \Rightarrow$ le système en boucle fermée est stable.

Enoncé du critère du revers:

Un système asservi linéaire est stable, si en décrivant le lieu de transfert dans le plan de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte, on laisse le point critique sur la gauche. Il est instable dans le cas contraire. Si le lieu passe par le point critique, le système est juste instable.

Exemple



3.2. Utilisation du diagramme de Bode

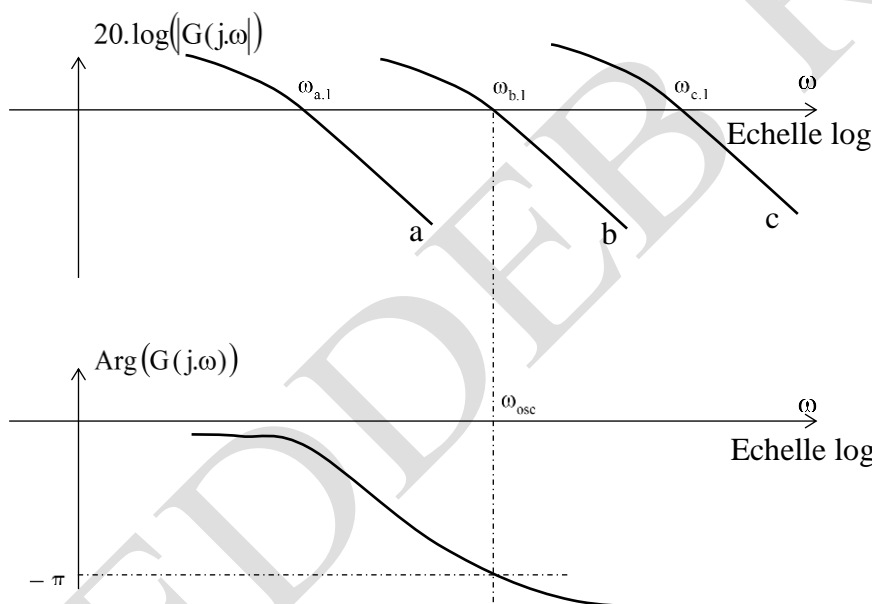


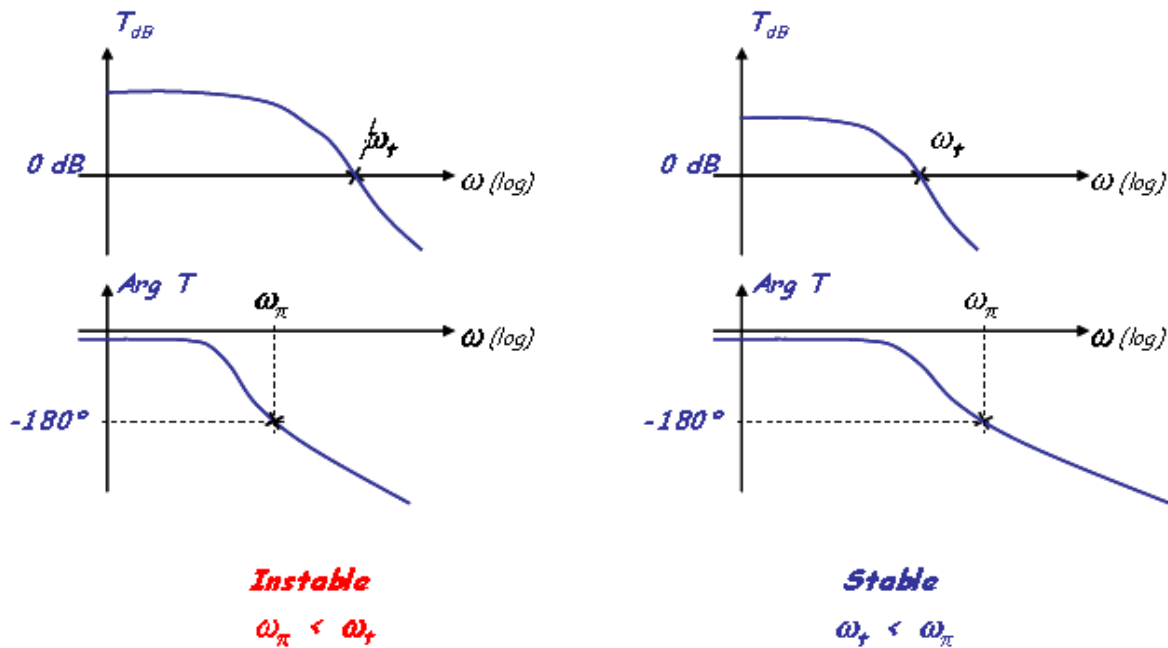
Figure I.2. Critère du critère de révers dans le plan de Bode

- **Système (a):** $\omega_{a.1} < \omega_{osc} \Rightarrow$ le système en boucle fermée est stable.
- **Système (b):** $\omega_{b.1} = \omega_{osc} \Rightarrow$ le système en boucle fermée est juste instable.
- **Système (c):** $\omega_{c.1} > \omega_{osc} \Rightarrow$ le système en boucle fermée est instable.

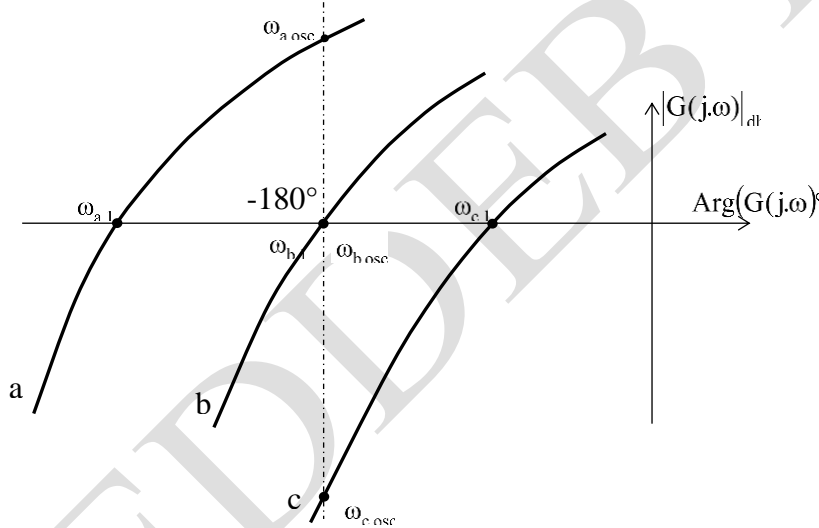
Enoncé:

Le système sera stable en boucle fermée si pour la pulsation ω_{osc} , la courbe d'amplitude passe en dessous du niveau 0_{db} .

Exemple :



3.3. Utilisation du diagramme de Black

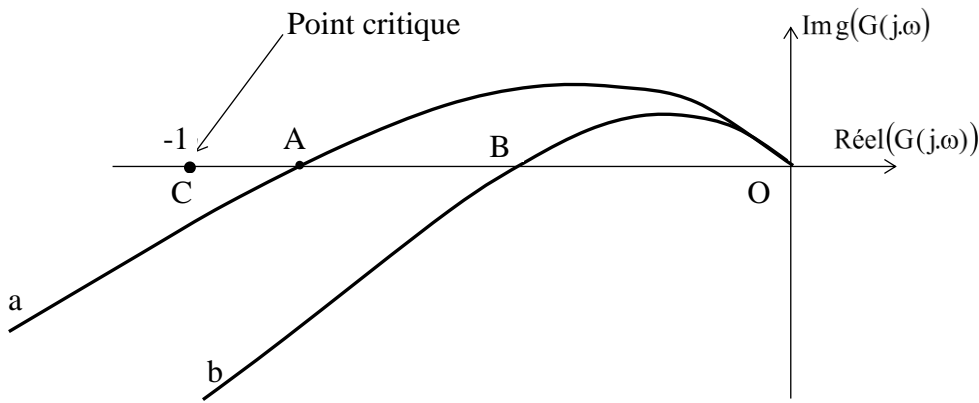


- **Système (a):** $\omega_{a.1} > \omega_{osc} \Rightarrow$ le système en boucle fermée est instable.
- **Système (b):** $\omega_{b.1} = \omega_{osc} \Rightarrow$ le système en boucle fermée est juste instable.
- **Système (c):** $\omega_{c.1} < \omega_{osc} \Rightarrow$ le système en boucle fermée est stable.

Enoncé:

Un système asservi linéaire est stable, si en décrivant le lieu de transfert dans le plan de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte, on laisse le point critique sur la droite. Il est instable dans le cas contraire. Si le lieu passe par le point critique, le système est juste instable.

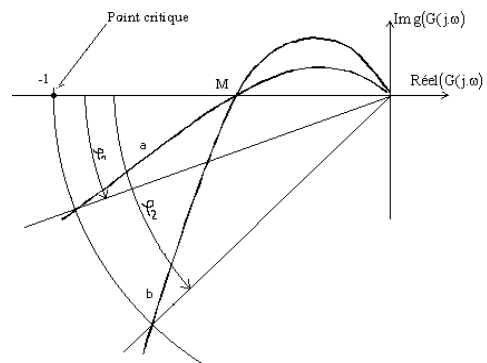
4. Marge de gain et marge de phase



Les deux systèmes a et b sont stables. Les deux lieux de Nyquist coupent l'axe réel respectivement en point A et B. Le lieu de Nyquist du système a est le plus proche du point critique ($OA > OB$). On peut dire alors que le système b est plus stable que le système a.

Les deux systèmes a et b coupent l'axe réel en un seul point M. Le lieu de Nyquist du système a est le plus proche du point critique ($\varphi_1 < \varphi_2$).

On peut dire alors que le système b est plus stable que le système a.



On remarque alors que les critères ci-dessus sont des critères de stabilité absolus, ces critères ne permettent pas en générale de classer les systèmes suivant leur stabilité.

Pour cela, on définit des marges de stabilité,

C'est à dire des distances entre le point critique et le lieu de la fonction de transfert en **boucle ouverte**.

On définit la **marge de gain** et la **marge de phase**.

4.1. Marge de gain

La marge de gain est défini par:
$$Mg = \frac{1}{|G(j, \omega_{osc})|}$$

On définit aussi la marge de gain en décibel:
$$Mg_{db} = -20 \cdot \log(|G(j, \omega_{osc})|)$$

Le système est stable si $Mg > 1 \Rightarrow Mg_{db} > 0$

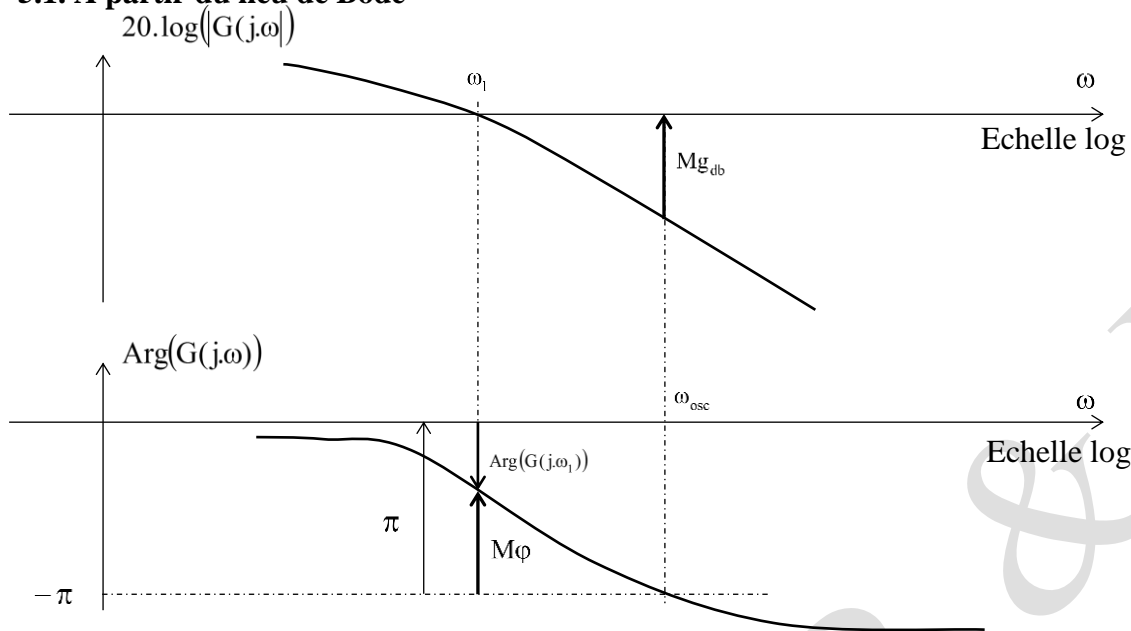
4.2. Marge de phase

La marge de phase est défini par:
$$M\varphi = \pi + \text{Arg}(G(j, \omega_1))$$

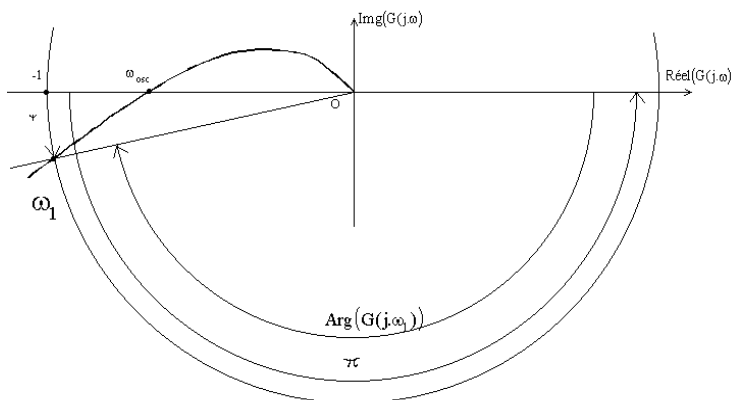
Le système est stable si $M\varphi > 0$.

5. Détermination graphique de la marge de gain et la marge de phase

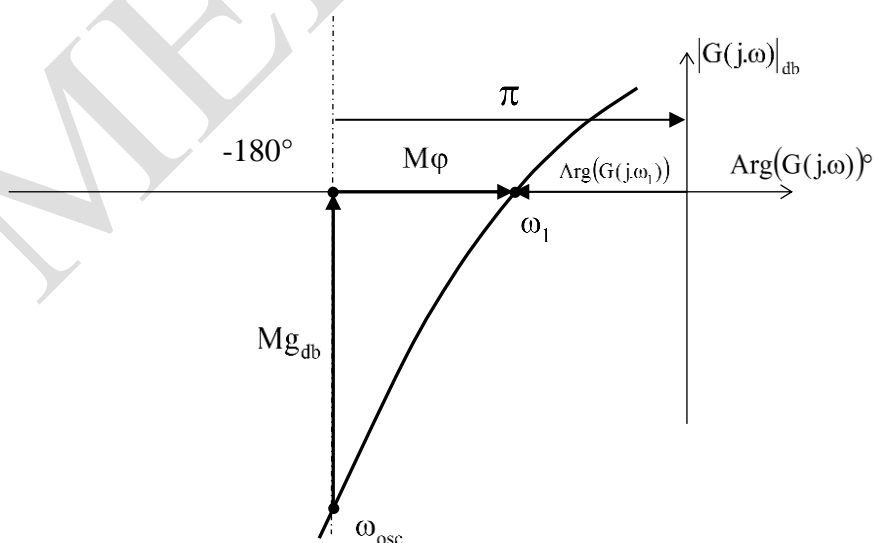
5.1. A partir du lieu de Bode



5.2. A partir du lieu de Nyquist



5.3. A partir du lieu de Black:



II. PRECISION

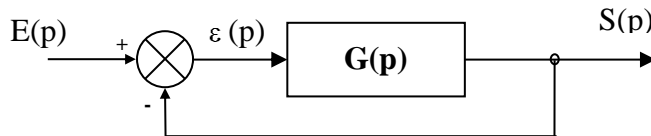
1. Définition

L'étude de la précision d'un système à retour unitaire revient à calculer la valeur de la différence (appelée aussi écart ou erreur) noté ε qui est égale: $\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$

En régime transitoire cette différence est nommée erreur dynamique.

En régime permanent cette différence est nommée erreur statique, définie par:

Soit le système à retour unitaire suivant :



$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

Experiment $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) \quad \text{Or } S(p) = G(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\rightarrow \varepsilon(p) = E(p) - G(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\rightarrow \varepsilon(p) = E(p) / (1 + G(p))$$

$$\rightarrow \varepsilon_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot E(p)}{1 + G(p)}$$

- Si l'entrée est un échelon de position ($E(p) = E_0/p$), ε_{∞} s'appelle **erreur statique de position**.
- Si l'entrée est un échelon de vitesse (rampe) ($E(p) = E_0/p^2$), ε_{∞} s'appelle **erreur statique de vitesse** ou **de traînage**.
- Si l'entrée est un échelon d'accélération ($E(p) = E_0/p^3$), ε_{∞} s'appelle **erreur statique d'accélération**.

2. Classe d'un système asservi

$$\text{Soit : } G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 + b_1P + \dots + b_mP}{a_0 + a_1P + \dots + a_nP}$$

$$\text{Cette fonction peut se mettre sous la forme : } G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K_{\alpha}}{P^{\alpha}} \times \frac{1 + \beta_0P + \dots}{1 + \gamma_0P + \dots}$$

Avec α : classe du système (nombre d'intégration dans le système).

K_{α} : gain statique

3. Tableau de précision

Classe Entrée	0	1	2
E_0/p	$\frac{E_0}{1+K_0}$	0	0
E_0/p^2	∞	$\frac{E_0}{K_1}$	0
E_0/p^3	∞	∞	$\frac{E_0}{K_2}$

4. Exemple:

On considère le même exemple précédent.

1-Calculer en fonction de K l'erreur statique de position et l'erreur statique de traînage.

2-Calculer k pour avoir une erreur statique de vitesse de 10%.

Solution: Soit $G(p)$ la fonction de transfert du système en boucle ouverte.

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \frac{3.k}{p.(p+1).(p+3)}} = \frac{p^3 + 4.p^2 + 3.p}{p^3 + 4.p^2 + 3.p + 3.k} . E(p)$$

• **Erreur statique de position:** $\rightarrow E(p) = \frac{E}{p}$.

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p . \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p . \frac{p^3 + 4.p^2 + 3.p}{p^3 + 4.p^2 + 3.p + 3.k} . \frac{E}{p} = 0$$

$$\varepsilon_{\infty} = 0$$

• **Erreur statique de vitesse:** $\rightarrow E(p) = \frac{E}{p^2}$.

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p . \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p . \frac{p^3 + 4.p^2 + 3.p}{p^3 + 4.p^2 + 3.p + 3.k} . \frac{E}{p^2} = \frac{E}{k}$$

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{E}{k}$$

$$\varepsilon_{\infty} = 0,1 \Leftrightarrow \frac{E}{k} = 0,1 \Leftrightarrow$$

$$k = 10.E$$

III. RAPIDITE

1. Définition

Un système est dit rapide s'il se stabilise à son régime permanent à un temps jugé satisfaisant.

Les paramètres temps de réponse, temps de pic, temps de montée et le dépassement caractérisent la rapidité du système.

- Temps de réponse T_r : temps mis pour atteindre 5% de la valeur finale.
- Temps de pic T_p : temps nécessaire pour atteindre le premier pic de la réponse du système.
- Temps de montée T_m : temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de $S(\infty)$.

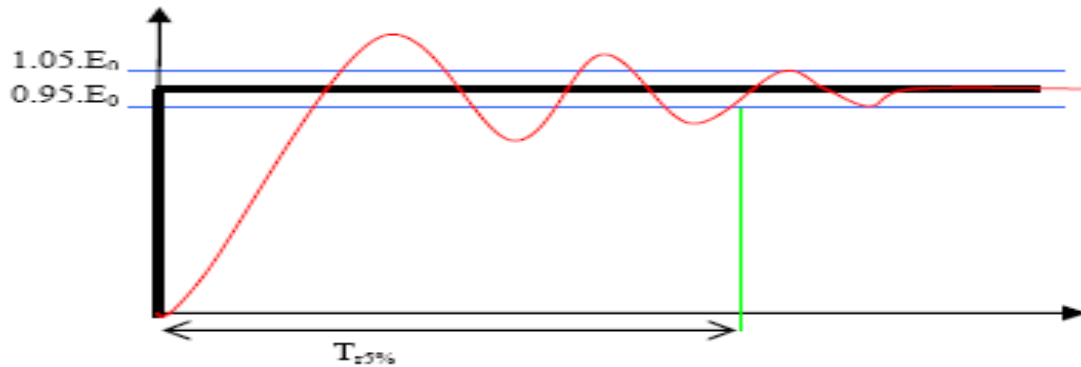


Figure I.3. Temps de réponse à 5%

2. Critère algébrique d'amortissement

La rapidité du système du second ordre est liée à l'amortissement ξ . on va donc par analogie avec le système du second ordre définir un critère d'amortissement qui permet de conclure sur la rapidité des systèmes d'ordre quelconque.

2.1. Critère de NASLIN

Soit un système décrit par son équation caractéristique en BF :

$$D(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$$

On définit le critère d'amortissement α_i :

$$\alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} \cdot a_{i+1}}$$

Le critère algébrique d'amortissement consiste à donner lorsque c'est possible à ces rapports caractéristique une valeur supérieure ou égale à α .

Le dépassement est défini par la relation suivante : $\text{Log}_{10} D\% = 4.8 - 2\alpha$

Le temps de pic est défini par la relation suivante : $T_p = 2.2 \frac{a_1}{a_0}$

2.2. Exemple

On considère le même exemple précédent.

- 1- Déterminer la valeur de K qui assure un dépassement inférieur ou égal à 6%
- 2- Cette valeur de K assure-t-il la stabilité du système.
- 3- Calculer la valeur du dépassement et du temps de pic.