Conduction thermique

Un transfert d'énergie a lieu chaque fois :

- qu'un gradient de température existe à l'intérieur d'un système,
- ou lorsque deux systèmes à températures différentes sont mis en contact.

Le transfert peut être défini comme la transmission d'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'un gradient.

On distingue 3 modes de transfert de chaleur : conduction, convection et rayonnement.

Dans ce chapitre, sera présentée et étudiée la conduction thermique.

La conduction est le phénomène par lequel la chaleur se transmet d'une région à haute température vers une autre à basse température à l'intérieur d'un milieu solide (liquide ou gazeux sous certaines conditions) ou entre différents milieux mis en contact.

Le transfert d'énergie se fait par transmission de l'énergie cinétique d'agitation thermique des particules qui ont une énergie cinétique plus grande dans les régions à température élevée vers les régions à température plus faible.

I. Loi de la conduction thermique

1. Milieu homogène

On appelle milieu homogène un milieu constitué par un seul matériau.

2. Milieu isotrope

On appelle milieu isotrope un milieu dont les caractéristiques physiques (ρ, c, λ) ne dépendent pas des variables d'espace.

3. Enoncé de la loi de la conduction

La propagation de la chaleur s'effectue dans le sens opposé du gradient de température et est proportionnel à ce gradient.

Cette loi est appelée la loi de Fourier. Elle s'écrit pour un milieu homogène et isotrope comme suit :

$$\vec{q} = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\, T$$

Où

λ est la conductivité thermique du matériau (W/m°C)

q est la densité du flux qui est la puissance qui traverse l'unité de surface (W/m^2)

ϕ est le flux de chaleur qui est la quantité de chaleur qui traverse une surface S par unité de temps (W)

Remarque :

- ✓ La conductivité thermique est une propriété physique caractéristique du milieu matériel. Son unité est :

Système d'unité	Système international (SI)	Système des thermiciens (S Th)	Système anglo-saxon (SAS)
Unité	$\frac{W}{m.°C}$	$\frac{kcal}{h.m.°C}$	$\frac{Btu}{hr.ft.°F}$

- ✓ La conductivité thermique d'un alliage métallique est plus faible que celle de chacun des métaux composants.
- ✓ La conductivité thermique d'un solide est supérieure à celle d'un liquide laquelle est supérieure à celle d'un gaz.
- ✓ Les solides ayant une mauvaise conductivité thermique sont utilisés comme isolants thermiques tels que le liège sec, le bois sec, le polystyrène, la laine de verre, etc.

II. Application de la loi de Fourrier

1. Conduction plane : Conduction dans les murs ou les plaques

a. Expression du gradient de température

Pour un système obéissant à une géométrie plane ou rectangulaire, considérons un point M(x,y,z) appartenant à ce système. Le gradient de température s'écrit dans un repère cartésien (O,x,y,z) et de base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ comme suit :

$$\overrightarrow{grad}\, T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\vec{k}$$

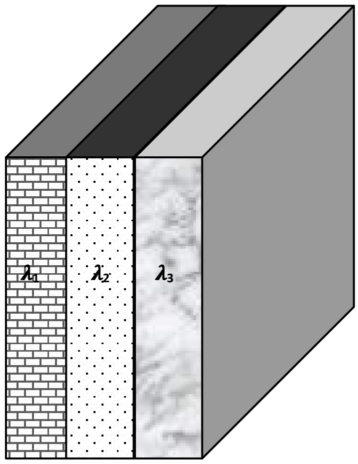
b. Mur simple

On appelle mur simple ou encore monocouche à face isotherme un matériau limité par deux plans parallèles de grandes dimensions par rapport à la distance qui les sépare. Les surfaces isothermes sont parallèles aux faces et la chaleur s'écoule perpendiculairement aux faces.

c. Mur composite

On appelle mur composite, la juxtaposition de n murs simples constitués de matériaux différents limités par des plans parallèles et parfaitement accolés les uns des autres.

Exemple : un mur composite constitué de trois couches simples différentes :



d. Application

Soit un mur simple homogène et isotrope de conductivité λ, de faible épaisseur e et limité par deux surfaces planes parallèles et identiques ($S_0=S_1=S$), de températures respectives T_0 et T_1 telle que $T_0 > T_1$. Le régime est supposé stationnaire ainsi qu'il n'y a pas de génération de chaleur.

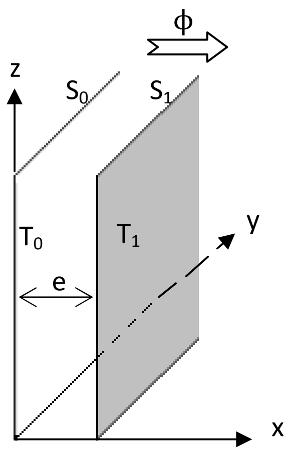
i. Expression du flux de chaleur

On a :

e <<<S ⇨on néglige les effets de bord c'est-à-dire que les composantes du vecteur densité de flux selon y et selon z sont négligeables supposées nulles:

q_y et q_z <<< q_x ⇨ $q_y = q_z = 0$ ⇨la conduction est donc monodimensionnelle et unidirectionnelle.

⇨ Les surfaces isothermes sont des plans parallèles aux surfaces isothermes S_0 et S_1



Hypothèses :

- Régime permanent
- Conduction sans génération de chaleur

Le bilan d'énergie s'écrit en général (voir chapitre 1) :

$$\phi_e + \phi_g = \phi_s + \phi_{st}$$

or le régime permanent ⇨ $\phi_{st}=0$ et il n'y a pas de génération de flux ⇨ $\phi_g=0$

d'où $\phi_e = \phi_s$: le flux qui entre est égal au flux qui sort donc le flux se conserve : ϕ=cst.

<u>NB</u> : Dans tout ce qui suit, on admettra que ϕ=cst.

La loi de Fourier s'écrit dans ce cas par projection dans le repère cartésien :

$q = q_x = -\boldsymbol{\lambda \frac{dT}{dx}}$ ⇨ $\int_0^e \boldsymbol{q\, dx} = -\int_{T_0}^{T_1} \boldsymbol{\lambda\, dT}$ ($\frac{dT}{dx} < 0$ car lorsque x augmente, T diminue puisque $T_0 >$ T_1 et on sait que la chaleur se propage du milieu chaud vers le milieu froid, donc le sens du vecteur de la densité du flux suit le sens des x croissant)

Or

$$|q| = \frac{\phi}{S} = q_x$$

D'où,

$$\int_0^e \frac{\phi}{S}\, \boldsymbol{dx} = -\int_{T_0}^{T_1} \boldsymbol{\lambda\, dT}$$

Comme le flux est constant à travers le mur ainsi que la surface S (mur simple) et la conductivité thermique $\boldsymbol{\lambda}$ (milieu homogène et isotrope) sont constantes.

Donc,

$$\frac{\phi}{S}\int_0^e \boldsymbol{dx} = -\lambda \int_{T_0}^{T_1} \boldsymbol{dT}$$

$$\Rightarrow \phi \int_0^e \boldsymbol{dx} = -S.\lambda \int_{T_0}^{T_1} \boldsymbol{dT}$$

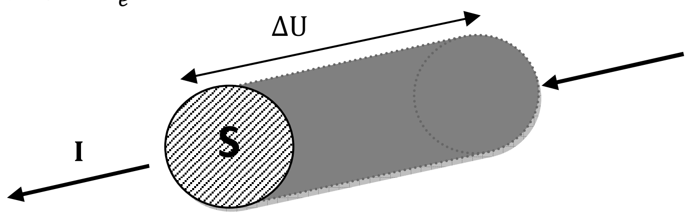
$$\Rightarrow \phi [\boldsymbol{x}]_0^e = -S.\boldsymbol{\lambda}[\boldsymbol{T}]_{T_0}^{T_1}$$

$$\Rightarrow \phi \boldsymbol{e} = -S.\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{T_1} - \boldsymbol{T_0})$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{S.\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{T_0} - \boldsymbol{T_1})}{\boldsymbol{e}}$$

ii. Notion de résistance thermique (Analogie électrique)

Un fil électrique de longueur L, de section S et de conductivité thermique K_e soumis à une différence de potentiel ΔU, laisse passer un courant électrique tel que : $\Delta U = U_0 - U_1 = \frac{L}{K_e S}.I$ ou encore $\Delta U = R_e.I$.



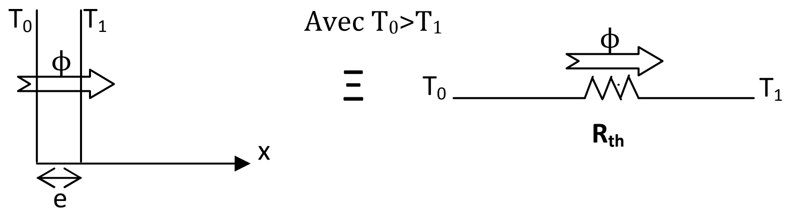
Cette équation est analogue à celle donnant le potentiel thermique :

$\Delta T = T_0 - T_1 = \frac{e}{\lambda S}.\phi = R_{th}.\phi$ soit $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

On établit la correspondance suivante :

Potentiel électrique ΔU	⟺	Potentiel thermique ΔT
Intensité électrique I	⟺	Flux thermique ϕ
Résistance électrique R_e	⟺	Résistance thermique R_{th}

Pour le problème thermique, on établit son équivalent électrique :



Comme

$$\phi = \frac{S.\lambda(T_0-T_1)}{e} \Rightarrow \phi = \frac{(T_0-T_1)}{\frac{e}{S.\lambda}} \Rightarrow \phi = \frac{(T_0-T_1)}{R_{th}}$$

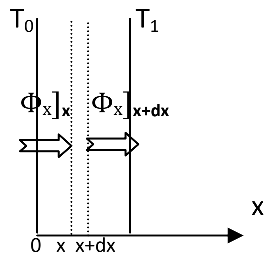
***NB* : L'unité de la résistance thermique est °C/W.**

iii. Distribution de la température dans un mur simple en régime permanent et sans génération

En appliquant le bilan d'énergie sur un élément de volume dv d'un mur simple on a :

$\phi_e - \phi_s = 0$

⇨ $\Phi_x]_x - \phi_x]_{x+dx} = 0$ ⇨ $\frac{d\phi_x}{dx}dx = 0$ ⇨ Φ_x=cte=A



Or $\phi_x = -\lambda.S\frac{dT}{dx} = A$ ⇨ $\frac{dT}{dx} = \frac{-A}{\lambda.S}$ ⇨ $T(x) = \frac{-A}{\lambda.S}x + B$

Conditions aux limites:

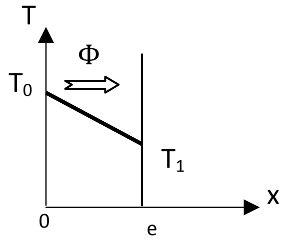
❶ x=0 → $T=T_0 \Rightarrow B= T_0$

❷ x=e → $T=T_1 \Rightarrow$ $T_1 = \frac{-A}{\lambda.S}e + T_0 \Rightarrow A = \frac{S.\lambda(T_0-T_1)}{e} = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \phi$

D'où,

$T(x) = \frac{-\frac{S.\lambda(T_0-T_1)}{e}}{\lambda.S}x + T_0 \Rightarrow T(x) = \frac{(T_1-T_0)}{e}x + T_0$: C'est l'équation d'une droite affine (car elle peut s'écrire sous la forme T(x) = ax + b) de pente décroissante $\frac{(T_1-T_0)}{e}$ (car T_0>T_1) et d'ordonnée à l'origine T_0.

Par conséquent, le profil de température d'un mur simple en régime permanent et sans génération est linéaire et représenté par la figure suivante :



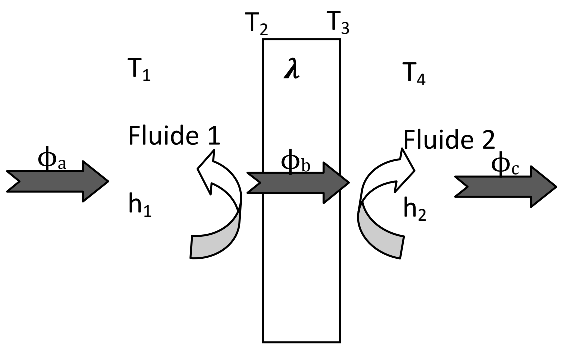
Application 1

Une tôle en aluminium (λ=230W.m^{-1}.K^{-1}) possède une épaisseur de 1,0 mm. On maintient l'une des deux faces à 40°C et l'autre à 20°C.

Calculer le débit d'énergie thermique traversant la tôle par mètre carré ? tout en précisant les hypothèses nécessaires pour résoudre ce problème.

iv. Mur simple au contact de deux fluides

Considérons deux faces d'un mur simple baignant dans deux fluides différents comme montré dans la figure ci-dessous en supposant que T_1>T_4:



L'échange de chaleur entre un fluide chaud (dans ce cas, le fluide 1) et un fluide froid (le fluide 2) séparés par une paroi se fait de la façon suivante :

① Il y a échange entre le fluide chaud de température T_1 et la paroi du mur de température T_2 ⇨l'échange se fait par convection ⇨ ϕ_a

② La chaleur cédée traverse la paroi ⇨ ce transfert se fait par conduction ⇨ ϕ_b.

③ Il y a échange entre la paroi du mur de température T_3 et le fluide froid de température T_4 ⇨l'échange se fait par convection ⇨ ϕ_c.

L'échange de chaleur par convection entre un fluide T_1 à et une paroi à la température T_2 obéit à la loi de Newton : $\boldsymbol{\phi = h.S(T_1 - T_2)}$

Avec ϕ : flux thermique (W)

S : surface d'échange=surface d'une couche isotherme (m²)

h : coefficient d'échange entre un fluide et la paroi (W/m²°C). h dépend de la nature du fluide ainsi que sa vitesse et sa température.

Pour un transfert thermique, en régime permanent et sans génération de chaleur, le flux de chaleur est constant à travers chaque portion du système étudié ⇨ $\phi_a = \phi_b = \phi_c = \phi$

avec

$$\boldsymbol{\phi_a = h_1.S(T_1 - T_2)}$$

$$\boldsymbol{\phi_b = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{e}{\lambda S}}}$$

$$\boldsymbol{\phi_c = h_2.S(T_3 - T_4)}$$

D'où,

$$\boldsymbol{\phi = h_1.S(T_1 - T_2) = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{e}{\lambda S}} = h_2.S(T_3 - T_4)}$$

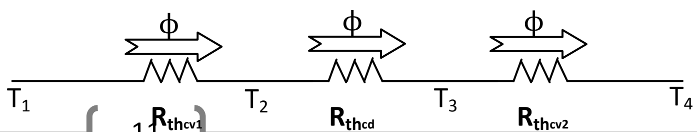
Soit,

$$\boldsymbol{\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1.S}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{1}{h_2.S}} = \frac{(T_1 - T_4)}{\frac{1}{h_1.S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_2.S}}}$$

On peut écrire,

$$\boldsymbol{\phi = \frac{(T_1 - T_4)}{R_{th_{cv1}} + R_{th_{cd}} + R_{th_{cv2}}}}$$

Le schéma électrique relatif à ce problème d'échange de chaleur est le suivant :



$\mathbf{R_{th_{cd}}}$: résistance de conduction d'un mur

$\mathbf{R_{th_{cv1}}}$: résistance de convection interne

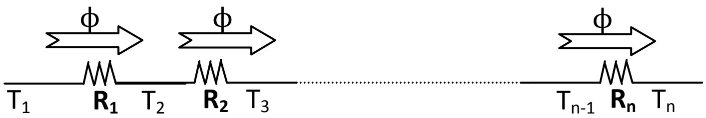
$\mathbf{R_{th_{cv2}}}$: résistance de convection externe

$$\mathbf{R_{th_{cv}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{h.S}} \left[{}^{\circ}\mathrm{C}/\mathbf{W}\right]$$

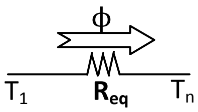
Remarque :

1) Les résistances thermiques obéissent aux mêmes règles que les résistances électriques :

❶ Les résistances thermiques placées dans le sens de l'écoulement de la chaleur sont en série et s'additionnent.



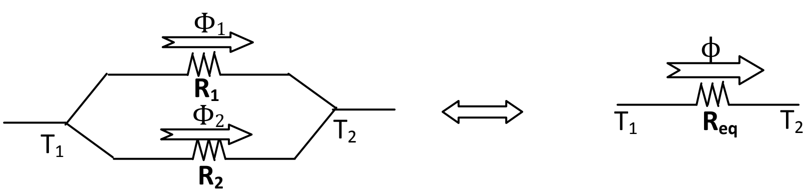
Le schéma électrique équivalent relatif à ce problème d'échange de chaleur est le suivant :



Avec

$$\mathbf{R_{eq}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{R_i}$$

❷ Les résistances placées perpendiculairement à l'écoulement de la chaleur sont en parallèles et on a :



Avec

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_{eq}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_2}}$$

Donc l'expression généralisée de la résistance équivalente pour un montage en parallèle est :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

2) A partir de l'expression des égalités des flux :

$$\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1 . S}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{1}{h_2 . S}} = \frac{(T_1 - T_4)}{\frac{1}{h_1 . S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 . S}}$$

Et après avoir calculer le flux thermique ϕ tout en connaissant h_1, h_2, S, λ, e,T_1 et T_4, on peut déduire les températures intermédiaires T_2 et T_3.

Application 2

Une paroi d'entrepôt frigorifique est constituée (partant de l'intérieur) par :

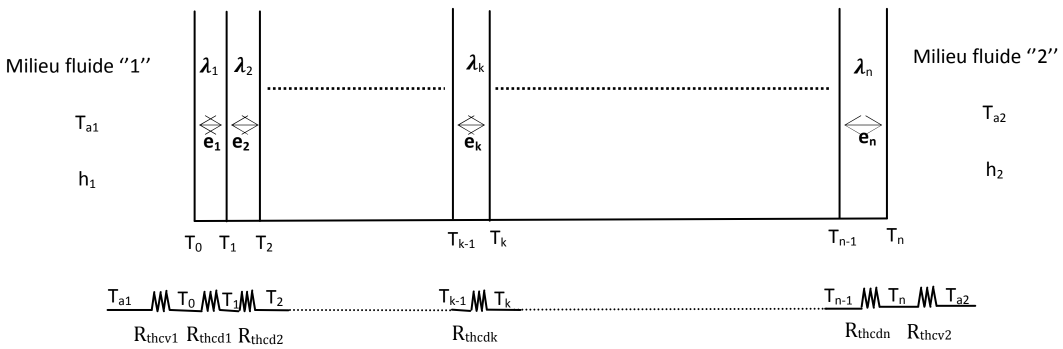
- 1,0 mm d'aluminium ((λ=230 W.m^{-1}.K^{-1})
- 3,0 mm d'un isolant (λ=3,0.10^{-2} W.m^{-1}.K^{-1})
- 5 cm de béton (λ=1,1 W.m^{-1}.K^{-1})

La face interne est -40°C et la face externe est à +30°C.

1) Calculer la densité de flux d'énergie à travers cette paroi.
2) Calculer les températures aux contacts aluminium-isolant et isolant-béton.

v. Mur composite au contact de deux fluides

Soit un mur composite constituant de n murs simples :



On a :

- le flux thermique:

$$\phi = \frac{(T_{a1} - T_{a2})}{\frac{1}{h_1 . S} + \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{\lambda_i S} + \frac{1}{h_2 . S}}$$

– la résistance thermique équivalente :

$$\mathbf{R_{eq}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{h_1.S}} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{e_i}}{\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i}\mathbf{S}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{h_2.S}}$$

2. Conduction cylindrique : conduction dans les couches cylindriques

a. Expression du gradient de température

Soit un point M(r,,z) appartenant à un système obéissant à une géométrie cylindrique. Le gradient de température en ce point M s'écrit dans un repère de coordonnées cylindriques et de base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi}, \vec{k})$ comme suit :

$$\overrightarrow{grad}\, T = \frac{\partial T}{\partial r}\,\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\,\overrightarrow{u_\varphi} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\vec{k}$$

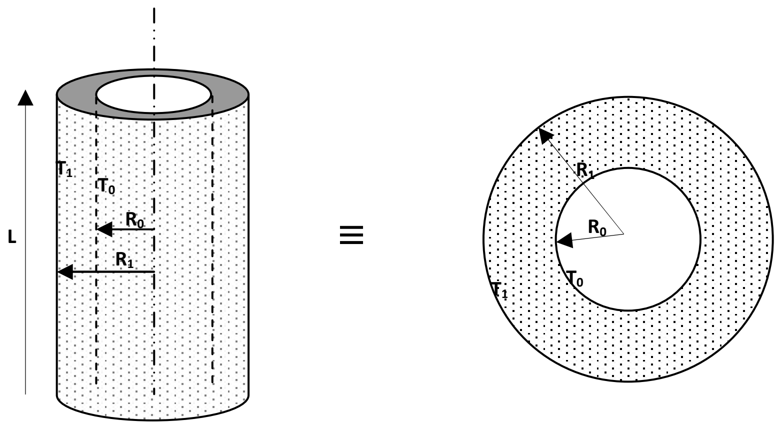
b. Application : cas d'une couche cylindrique simple : tube ou tuyau

Soit une couche cylindrique supposée homogène et isotrope, de conductivité thermique $\boldsymbol{\lambda}$, comprise entre les rayons R_0 et R_1 (espace annulaire) petits devant sa longueur L. Les faces latérales sont portées aux températures constantes et uniformes telles que :

- Pour $r=R_0$, on a $T=T_0$
- Pour $r=R_1$, on a $T=T_1$

Avec $T_0>T_1$

Le régime est supposé stationnaire.



i. Expression du flux thermique

D'après la loi de Fourier, on a :

$$\vec{q} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T$$

Cette loi s'écrit dans la base cylindrique comme suit :

$$\vec{q} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \overrightarrow{u_\varphi} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Soit,

$$\vec{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \left(-\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \overrightarrow{u_\varphi} + \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \vec{k}$$

Peut être écrite aussi de la façon suivante,

$$\vec{q} = q_r \overrightarrow{u_r} + q_\varphi \overrightarrow{u_\varphi} + q_z \vec{k}$$

En raison de la symétrie cylindrique, la température ne dépend pas de l'angle polaire $\boldsymbol{\varphi}$ ⇨ la composante du vecteur densité de flux dépendant de $\boldsymbol{\varphi}$ est nulle ⇨ $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ ⇨$q_{\varphi}=0$.

On sait que R_1-R_0 <<<L (l'espace annulaire est très petit devant la longueur du cylindre)⇨on peut négliger les effets de bord c'est-à-dire que la variation de la température selon z est négligeable même nulle.

⇨ La composante du vecteur densité de flux dépendant de z est nulle ⇨ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ ⇨$q_z=0$.

⇨La température ne dépend que de r ⇨ La composante du vecteur densité de flux dépendant de r est non nulle.

Remarque : Dans ce cas, les surfaces isothermes sont des couches cylindriques coaxiaux de rayon r (tel que $r \in [R_0,R_1]$).

La loi de Fourier s'écrit donc :

$$\vec{q} = q_r \overrightarrow{u_r} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \overrightarrow{u_r} = -\lambda \frac{dT}{dr} \overrightarrow{u_r}$$

⇨ La conduction dans ce cas est radiale

$$q = |q_r| = \left| -\lambda \frac{dT}{dr} \right|$$

D'après la figure, quand le rayon augmente la température diminue aussi. D'où, $\frac{dT}{dr} < 0$

⇨

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

Or

$$q = \frac{\phi}{S}$$

Alors,

$$\frac{\phi}{S} = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

⇨

$$\phi = -\lambda . S . \frac{dT}{dr}$$

Or les surfaces isothermes sont les surfaces des cylindres de longueur L et de rayon r qui varie entre R_0 et R_1 ⇨$S= 2\pi rL$.

L'expression de flux da chaleur devient :

$$\phi = -\lambda .2\pi rL. \frac{dT}{dr}$$

⇨

$$\phi \frac{dr}{r} = -\lambda .2\pi L. dT$$

On intègre :

$$\int_{R_0}^{R_1} \phi \frac{dr}{r} = -\int_{T_0}^{T_1} \lambda .2\pi L \; dT$$

Comme démontrer dans le cas d'un mur simple, le flux thermique se conserve puisque le régime est permanent et la conduction est sans génération de chaleur ⇨ϕ=cst. De même, $\boldsymbol{\lambda}$ est constante car le milieu annulaire est homogène et isotrope.

Par ailleurs,

$$\phi \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} = -\lambda .2\pi L \int_{T_0}^{T_1} dT$$

⇒

$$\phi [\ln r\,]_{R_0}^{R_1} = -\lambda .2\pi L [T\,]_{T_0}^{T_1}$$

⇒

$$\phi(\ln R_0 - \ln R_1) = -\lambda .2\pi L (T_0 - T_1)$$

D'où,

$$\phi = -\frac{2\pi\lambda\, L(T_0 - T_1)}{(\ln R_0 - \ln R_1)}$$

⇒

$$\phi = \frac{2\pi\lambda\, L(T_0 - T_1)}{\ln \frac{R_1}{R_0}}$$

ii. Expression de la résistance thermique

L'expression du flux thermique ϕ peut être écrite sous la forme :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{R_{th}}$$

Avec $R_{th} = \frac{\ln\frac{R_1}{R_0}}{2\pi\lambda\, L}$

Remarque :

$$R_{th} = \frac{\ln \frac{R_1}{R_0}}{2\pi\lambda\, L} = \frac{e}{\lambda\, S_{ml}}$$

En posant : $e=R_1-R_0$ et $S_{ml} = \frac{S_1 - S_0}{\ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right)}$ avec $S_0= 2\pi R_0L$ et $S_1= 2\pi R_1L$.

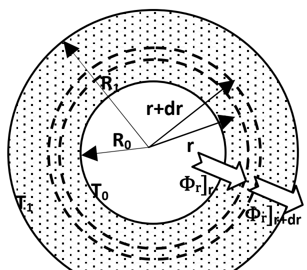
iii. ***Distribution de la température dans une couche cylindrique simple en régime permanent et sans génération***

En appliquant le bilan d'énergie sur un élément de volume dv d'une couche cylindrique on a :

$\phi_e - \phi_s = 0$

⇨ $\Phi_r]_r - \phi_r]_{r+dr} = 0$ ⇨ $-\frac{d\phi_r}{dr}\boldsymbol{dr} = \mathbf{0}$ ⇨ Φ_r=cte=A

Or $\phi_r = -\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{S}\frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{dr}} = \boldsymbol{A}$ ⇨ $\frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{dr}} = \frac{-A}{\lambda.2\pi rL}$ ⇨ $\boldsymbol{dT} = \frac{-\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.2\pi\boldsymbol{L}}\frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{r}}$



$$\Rightarrow \boldsymbol{T(r)} = \frac{-\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.\,2\pi\boldsymbol{L}}\ln \boldsymbol{r} + \boldsymbol{B}$$

C'est une équation à deux inconnues A et B. il suffit donc deux relations indépendantes pour la résoudre.

A et B sont deux constantes à déterminer avec les conditions aux limites.

<u>Conditions aux limites</u>:

➊ $r=R_0 \rightarrow T=T_0$

❷ $r=R_1 \rightarrow T=T_1$

En appliquant ces deux conditions aux limites à l'équation à résoudre, on aura :

❶ $\Rightarrow T(r=R_0) = \frac{-A}{\lambda.2\pi L}\ln R_0 + B = T_0$

$$\Rightarrow B = T_0 + \frac{A}{\lambda.2\pi L}\ln R_0$$

De même, on aura :

❷ $\Rightarrow T(r=R_1) = \frac{-A}{\lambda.2\pi L}\ln R_1 + B = T_1$

$$\Rightarrow B = T_1 + \frac{A}{\lambda.2\pi L}\ln R_1$$

D'où,

$$\Rightarrow B = T_0 + \frac{A}{\lambda.2\pi L}\ln R_0 = T_1 + \frac{A}{\lambda.2\pi L}\ln R_1$$

$$\Rightarrow T_0 + \frac{A}{\lambda.2\pi L}\ln R_0 = T_1 + \frac{A}{\lambda.2\pi L}\ln R_1$$

$$\Rightarrow T_0 - T_1 = \frac{A}{\lambda.2\pi L}\ln R_1 - \frac{A}{\lambda.2\pi L}\ln R_0$$

$$\Rightarrow \lambda.2\pi L(T_0 - T_1) = A(\ln R_1 - \ln R_0)$$

$$\Rightarrow \lambda.2\pi L(T_0 - T_1) = A\left(\ln\frac{R_1}{R_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda.2\pi L(T_0 - T_1)}{\ln\frac{R_1}{R_0}} = A = \phi$$

Or

$$\Rightarrow B = T_0 + \frac{A}{\lambda.2\pi L}\ln R_0$$

En remplaçant A par son expression, il en résulte :

$$\Rightarrow B = T_0 + \frac{\frac{\lambda.2\pi L(T_0 - T_1)}{\ln\frac{R_1}{R_0}}}{\lambda.2\pi L}\ln R_0$$

$$\Rightarrow B = T_0 + \frac{(T_0 - T_1)}{\ln\frac{R_1}{R_0}}\ln R_0$$

En remplaçant A et B dans l'équation T=f(r), on aura :

$$\Rightarrow \boldsymbol{T(r)} = \frac{-\dfrac{\lambda.2\pi L(\boldsymbol{T_0}-\boldsymbol{T_1})}{\ln\dfrac{\boldsymbol{R_1}}{\boldsymbol{R_0}}}}{\lambda.2\pi L}\ln \boldsymbol{r} + \boldsymbol{T_0} + \frac{(\boldsymbol{T_0}-\boldsymbol{T_1})}{\ln\dfrac{\boldsymbol{R_1}}{\boldsymbol{R_0}}}\ln \boldsymbol{R_0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T(r)} = \boldsymbol{T_0} + \frac{(\boldsymbol{T_1}-\boldsymbol{T_0})}{\ln\dfrac{\boldsymbol{R_1}}{\boldsymbol{R_0}}}\ln \boldsymbol{r} + \frac{(\boldsymbol{T_0}-\boldsymbol{T_1})}{\ln\dfrac{\boldsymbol{R_1}}{\boldsymbol{R_0}}}\ln \boldsymbol{R_0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T(r)} = \boldsymbol{T_0} + \frac{(\boldsymbol{T_1}-\boldsymbol{T_0})}{\ln\dfrac{\boldsymbol{R_1}}{\boldsymbol{R_0}}}(\ln \boldsymbol{r} - \ln \boldsymbol{R_0})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T(r)} = \boldsymbol{T_0} + \frac{(\boldsymbol{T_1}-\boldsymbol{T_0})}{\ln\dfrac{\boldsymbol{R_1}}{\boldsymbol{R_0}}}\left(\ln\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R_0}}\right)$$

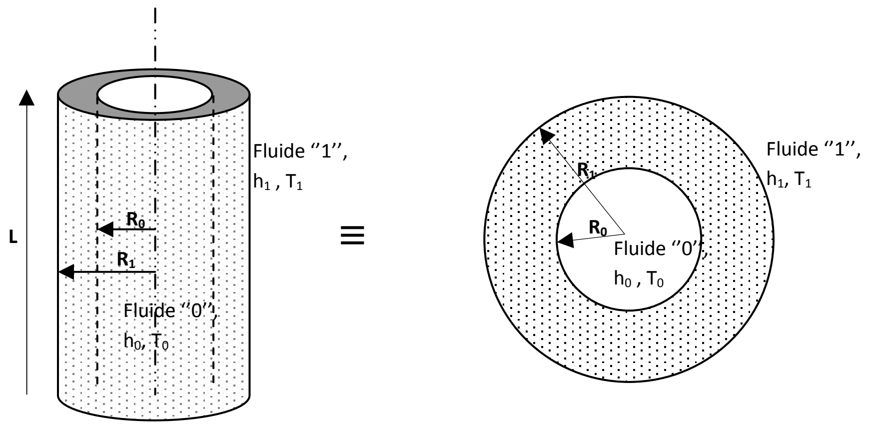
$$\Rightarrow \boldsymbol{T(r)} = \boldsymbol{T_0} + (\boldsymbol{T_1}-\boldsymbol{T_0})\frac{\ln\dfrac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R_0}}}{\ln\dfrac{\boldsymbol{R_1}}{\boldsymbol{R_0}}}$$

Ou tout simplement, le profil de température d'une couche cylindrique peut s'écrire :

$$\frac{\boldsymbol{T(r)}-\boldsymbol{T_0}}{(\boldsymbol{T_1}-\boldsymbol{T_0})} = \frac{\ln\dfrac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R_0}}}{\ln\dfrac{\boldsymbol{R_1}}{\boldsymbol{R_0}}}$$

c. Cas d'une couche cylindrique simple au contact de deux fluides

Soit une paroi cylindrique baignant dans un fluide ''1'' de température T_1. Un fluide''0'' de température T_0 circule à l'intérieur de ce cylindre. On pose $T_0 > T_1$.



i. Expression du flux thermique

En régime permanent, le flux thermique s'exprime par :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{h_0 2\pi R_0\, L} + \frac{\ln \frac{R_1}{R_0}}{2\pi\lambda\, L} + \frac{1}{h_1 2\pi R_1\, L}}$$

ii. Expression de la résistance thermique

L'expression du flux thermique ϕ peut être écrite sous la forme :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{R_{eq}}$$

Avec $R_{eq} = \frac{1}{h_0 2\pi R_0\, L} + \frac{\ln \frac{R_1}{R_0}}{2\pi\lambda\, L} + \frac{1}{h_1 2\pi R_1\, L}$: c'est l'expression de la résistance thermique.

<u>Remarque</u> :

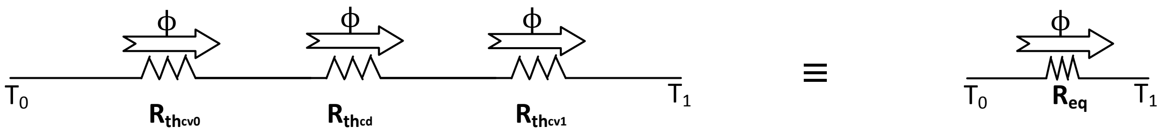
La résistance équivalente R_{eq} est la somme de trois termes :

❶ $\frac{1}{h_0 2\pi R_0\, L}$: représente la résistance de convection interne (R_{thcv0}).

❷ $\frac{\ln \frac{R_1}{R_0}}{2\pi\lambda\, L}$: représente la résistance de conduction de la paroi cylindrique (R_{thcd}).

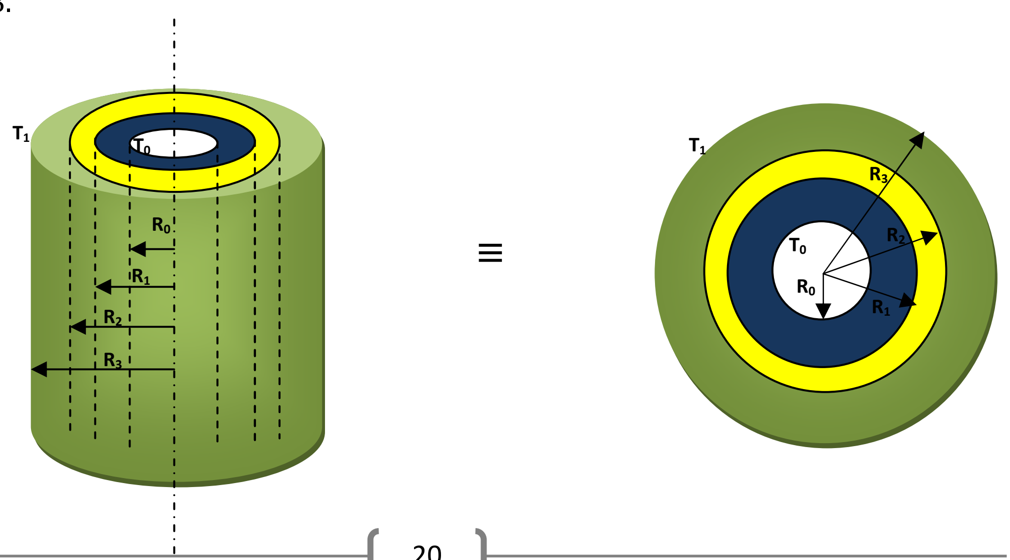
❸ $\frac{1}{h_1 2\pi R_1\, L}$: représente la résistance de convection externe (R_{thcv1}).

Le schéma électrique équivalent à ce problème est le suivant :



d. Cas d'un cylindre creux multicouches (couche cylindrique composite)

<u>Exemple</u> : n=3.



i. Expression du flux thermique

En régime permanent, le flux thermique s'exprime par :

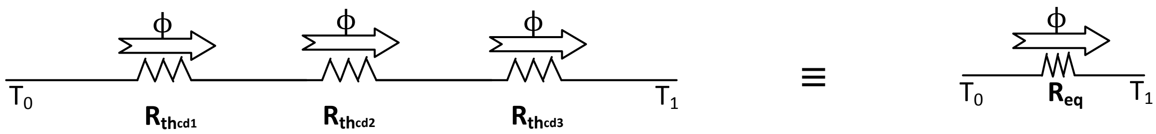
$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{\ln \frac{R_1}{R_0}}{2\pi\lambda_1 L} + \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda_2 L} + \frac{\ln \frac{R_3}{R_2}}{2\pi\lambda_3 L}}$$

ii. Expression de la résistance thermique

On en déduit, l'expression de la résistance thermique équivalente :

$$R_{eq} = \frac{\ln \frac{R_1}{R_0}}{2\pi\lambda_1 L} + \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda_2 L} + \frac{\ln \frac{R_3}{R_2}}{2\pi\lambda_3 L} = \mathrm{R}_{\mathrm{th}_{\mathrm{cd1}}} + \mathrm{R}_{\mathrm{th}_{\mathrm{cd2}}} + \mathrm{R}_{\mathrm{th}_{\mathrm{cd3}}}$$

Le schéma électrique relatif à ce problème est le montage de 3 résistances thermiques en série :



Généralisation :

En régime permanent, le flux thermique s'exprime par :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln \frac{R_i}{R_{i-1}}}{2\pi\lambda_i L}}$$

Il en résulte ainsi l'expression de la résistance thermique équivalente :

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln \frac{R_i}{R_{i-1}}}{2\pi\lambda_i L}$$

n: nombre de couches cylindriques.

$\boldsymbol{\lambda}_i$: conductivité thermique relative à la couche i.

e. Cas d'un cylindre creux multicouches au contact de deux fluides

De même, le flux thermique s'écrit comme suit :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{h_0 2\pi R_0\ L} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln \frac{R_i}{R_{i-1}}}{2\pi\lambda_i\ L} + \frac{1}{h_1 2\pi R_1\ L}}$$

Il en résulte ainsi l'expression de la résistance thermique équivalente :

$$R_{eq} = \frac{1}{h_0 2\pi R_0\ L} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln \frac{R_i}{R_{i-1}}}{2\pi\lambda_i\ L} + \frac{1}{h_1 2\pi R_1\ L}$$

n: nombre des couches cylindriques.

$\boldsymbol{\lambda}_i$: conductivité thermique relative à la couche i.

3. Conduction sphérique : conduction dans les couches sphériques sans génération

a. Expression du gradient de température

Soit un point M(r,,θ) appartenant à un système obéissant à une géométrie sphérique. Le gradient de température en ce point M s'écrit dans un repère de coordonnées sphériques et de base sphérique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi}, \overrightarrow{u_\theta})$ comme suit :

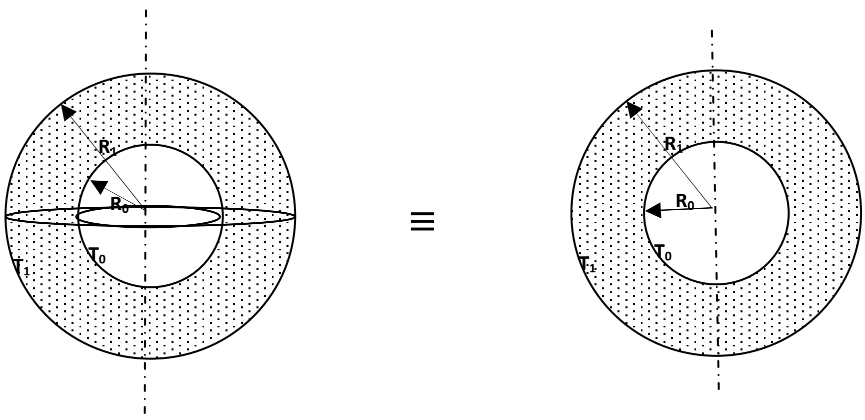
$$\overrightarrow{grad}\ T = \frac{\partial T}{\partial r}\ \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\ \overrightarrow{u_\varphi} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \theta}\ \overrightarrow{u_\theta}$$

b. Application : cas d'une couche sphérique simple

Une couche sphérique supposée homogène et isotrope, de conductivité thermique $\boldsymbol{\lambda}$, est limitée par deux surfaces sphériques concentriques respectivement de rayons R_0 et R_1 tels que $R_0 < R_1$. Les températures de ces surfaces sont uniformes et isothermes à T_0 et T_1 telles que $T_1 < T_0$. Le régime est supposé permanent. On suppose encore qu'il n'y a pas de génération de chaleur.

On a donc,

- Pour $r = R_0$, on a $T = T_0$
- Pour $r = R_1$, on a $T = T_1$



i. Expression du flux thermique

D'après la loi de Fourier, on a :

$$\vec{q} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$$

Cette loi s'écrit dans la base cylindrique comme suit :

$$\vec{q} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\, \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\, \overrightarrow{u_\varphi} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial T}{\partial \theta}\, \overrightarrow{u_\theta}\right)$$

Soit,

$$\vec{q} = -\lambda\, \frac{\partial T}{\partial r}\, \overrightarrow{u_r} + \left(-\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) \overrightarrow{u_\varphi} + \left(-\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) \overrightarrow{u_\theta}$$

Peut être écrite aussi de la façon suivante,

$$\vec{q} = q_r\, \overrightarrow{u_r} + q_\varphi\, \overrightarrow{u_\varphi} + q_\theta\, \overrightarrow{u_\theta}$$

En raison de la symétrie cylindrique, la température ne dépend ni de l'angle $\boldsymbol{\varphi}$ ni de l'angle θ⇨ les deux composantes du vecteur densité de flux dépendant l'une de $\boldsymbol{\varphi}$ et l'autre de θ sont nulles ⇨ $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ ⇨$q_\varphi = q_\theta = 0$.

⇨La température ne dépend donc que de r ⇨ La composante du vecteur densité de flux dépendant de r est non nulle.

Remarque : Dans ce cas, les surfaces isothermes sont des couches sphériques concentriques de rayon r (tel que r ∈ $[R_0,R_1]$).

La loi de Fourier s'écrit donc :

$$\vec{q} = q_r\, \overrightarrow{u_r} = -\lambda\, \frac{\partial T}{\partial r}\, \overrightarrow{u_r} = -\lambda\, \frac{dT}{dr}\, \overrightarrow{u_r}$$

⇨Identiquement à la conduction cylindrique, la conduction sphérique en régime permanent et sans génération est radiale.

$$q = |q_r| = \left|-\lambda\, \frac{dT}{dr}\right|$$

D'après la figure, quand le rayon augmente la température diminue aussi. D'où, $\frac{dT}{dr} < 0$

⇨

$$q = -\lambda\, \frac{dT}{dr}$$

Or

$$q = \frac{\phi}{S}$$

Alors,

$$\frac{\phi}{S} = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

⇨

$$\phi = -\lambda . S.\frac{dT}{dr}$$

Or les surfaces isothermes sont les surfaces des sphères de rayon r variant entre R_0 et R_1 ⇨$S=4\pi r^2$.

L'expression de flux da chaleur devient :

$$\phi = -\lambda .4\pi r^2.\frac{dT}{dr}$$

⇨

$$\phi\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr = \lambda .4\pi L.dT$$

On intègre :

$$\int_{R_0}^{R_1}\phi\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr = \int_{T_0}^{T_1}\lambda .4\pi L \; dT$$

Comme le flux thermique ϕ est constant (le régime est permanent et la conduction est sans génération de chaleur) ainsi que la conductivité $\boldsymbol{\lambda}$ (le milieu est homogène et isotrope).

Par ailleurs,

$$\phi\int_{R_0}^{R_1}\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr = \lambda .4\pi\int_{T_0}^{T_1}dT$$

⇒

$$\phi\left[\frac{1}{r}\right]_{R_0}^{R_1} = \lambda .4\pi[T\,]_{T_0}^{T_1}$$

⇒

$$\phi\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_1}\right) = \lambda .4\pi(T_0 - T_1)$$

D'où,

$$\phi = \frac{4\pi\lambda\,(T_0 - T_1)}{\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

ii. Expression de la résistance thermique

L'expression du flux thermique ϕ peut être écrite sous la forme :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{R_{th}}$$

Avec $R_{th} = \frac{\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_1}\right)}{4\pi\lambda}$

Remarque :

$$R_{th} = \frac{\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right)}{4\pi\lambda} = \frac{e}{\lambda\, S_{mg}}$$

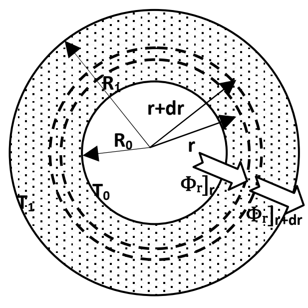
En posant : $e=R_1-R_0$ et $S_{mg} = (S_0.S_1)^{1/2}$ (S_{mg} : moyenne géométrique des surfaces S_0 et S_1)

avec $S_0= 4\pi R_0^2$ et $S_1= 4\pi R_1^2$.

iii. Distribution de la température dans une couche sphérique simple en régime permanent et sans génération

En appliquant le bilan d'énergie sur un élément de volume dv d'une couche cylindrique on a :

$\phi_e - \phi_s = 0$



⇨ $\Phi_r]_r - \phi_r]_{r+dr} = 0$ ⇨ $-\frac{d\phi_r}{dr}\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{0}$ ⇨ Φ_r=cte=A

Or $\phi_r = -\boldsymbol{\lambda.S}\frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{dr}} = \boldsymbol{A}$ ⇨ $\frac{dT}{dr} = \frac{-A}{\lambda.4\pi r^2}$ ⇨ $\boldsymbol{dT} = \frac{A}{\lambda.\pi}\left(-\frac{dr}{r^2}\right)$

$$⇨ \int \boldsymbol{dT} = \int \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.\pi}\left(-\frac{\boldsymbol{dr}}{r^2}\right)$$

$$⇨ \int \boldsymbol{dT} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.\pi}\int\left(-\frac{\boldsymbol{dr}}{r^2}\right)$$

$$⇨ \boldsymbol{T(r)} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{B}$$

C'est une équation à deux inconnues A et B. il suffit donc deux relations indépendantes au minimum pour la résoudre.

A et B sont deux constantes à déterminer avec les conditions aux limites.

Conditions aux limites:

❶ $r=R_0 \rightarrow T=T_0$

❷ $r=R_1 \rightarrow T=T_1$

En appliquant ces deux conditions aux limites à l'équation à résoudre, on aura :

❶ $\Rightarrow \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R_0}) = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_0}} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T_0}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T_0} - \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_0}}$$

De même, on aura :

❷ $\Rightarrow \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R_1}) = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_1}} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T_1}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T_1} - \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_1}}$$

D'où,

$$\Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T_0} - \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_0}} = \boldsymbol{T_1} - \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_1}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T_0} - \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_0}} = \boldsymbol{T_1} - \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_1}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T_0} - \boldsymbol{T_1} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_0}} - \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_1}}$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{T_0} - \boldsymbol{T_1}) = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_0}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_1}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{T_0} - \boldsymbol{T_1})}{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_0}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_1}}} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\phi}$$

Or

$$\Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T_0} - \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\lambda}.4\pi}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_0}}$$

En remplaçant A par son expression, il en résulte :

$$\Rightarrow B = T_0 - \frac{\frac{4\pi\lambda(T_0 - T_1)}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}}}{\lambda . 4\pi} \frac{1}{R_0}$$

$$\Rightarrow B = T_0 - \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} \frac{1}{R_0}$$

En remplaçant A et B dans l'équation T=f(r), on aura :

$$\Rightarrow T(r) = \frac{\frac{4\pi\lambda(T_0 - T_1)}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}}}{4\pi\lambda} \frac{1}{r} + T_0 - \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} \frac{1}{R_0}$$

$$\Rightarrow T(r) = T_0 + \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} \frac{1}{r} - \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} \frac{1}{R_0}$$

$$\Rightarrow T(r) = T_0 - \left(-\frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} \frac{1}{r} + \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} \frac{1}{R_0} \right)$$

$$\Rightarrow T(r) = T_0 - (T_0 - T_1) \left(\frac{\frac{1}{R_0}}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} - \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} \right)$$

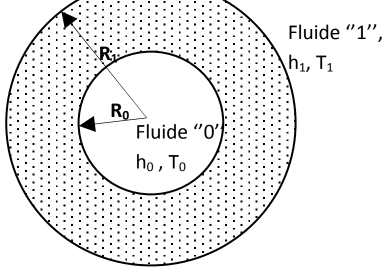
$$\Rightarrow T(r) = T_0 - (T_0 - T_1) \left(\frac{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} \right)$$

C'est le profil de température d'une couche sphérique qui peut s'écrire aussi autrement:

$$\Rightarrow \frac{T(r) - T_0}{T_1 - T_0} = \left(\frac{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}} \right)$$

c. Cas d'une couche sphérique simple au contact de deux fluides

Soit une paroi sphérique baignant dans un fluide ''1'' de température T_1. Un fluide''0'' de température T_0 se trouve à l'intérieur. On pose $T_0 > T_1$.



iii. Expression du flux thermique

En régime permanent, le flux thermique s'exprime par :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{h_0 4\pi R_0^2} + \frac{\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right)}{4\pi\lambda} + \frac{1}{h_1 4\pi R_1^2}} = \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{h_0 4\pi R_0^2} + \frac{R_1 - R_0}{4\pi\lambda\, R_0 R_1} + \frac{1}{h_1 4\pi R_1^2}}$$

iv. Expression de la résistance thermique

Comme,

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{R_{eq}}$$

Donc,

$R_{eq} = \frac{1}{h_0 4\pi R_0^2} + \frac{R_1 - R_0}{4\pi\lambda\, R_0 R_1} + \frac{1}{h_1 4\pi R_1^2}$: C'est l'expression de la résistance thermique équivalente.

<u>Remarque</u> :

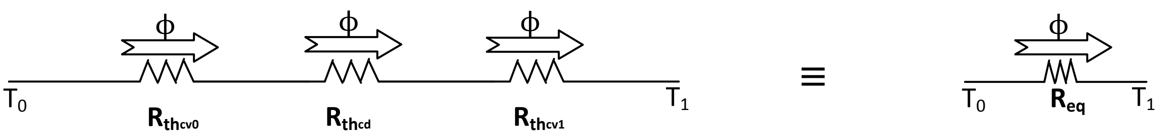
La résistance équivalente R_{eq} est la somme de trois termes :

❶ $\frac{1}{h_0 4\pi R_0^2}$: représente la résistance de convection interne (R_{thcv0}).

❷ $\frac{R_1 - R_0}{4\pi\lambda\, R_0 R_1}$: représente la résistance de conduction de la paroi sphérique (R_{thcd}).

❸ $\frac{1}{h_1 4\pi R_1^2}$: représente la résistance de convection externe (R_{thcv1}).

Le schéma électrique équivalent à ce problème est le suivant :



d. Cas d'une couche sphérique composite

En régime permanent, le flux thermique s'exprime par :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i - R_{i-1}}{4\pi\lambda_i\, R_i R_{i-1}}}$$

Il en résulte ainsi l'expression de la résistance thermique équivalente :

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i - R_{i-1}}{4\pi\lambda_i \, R_i R_{i-1}}$$

n: nombre de couches sphériques.

$\boldsymbol{\lambda}_i$: conductivité thermique relative à la couche i.

e. Cas d'une couche sphérique composite au contact de deux fluides

De même, le flux thermique s'écrit comme suit :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{h_0 4\pi R_0^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i - R_{i-1}}{4\pi\lambda_i \, R_i R_{i-1}} + \frac{1}{h_1 4\pi R_1^2}}$$

Il en résulte ainsi l'expression de la résistance thermique équivalente :

$$R_{eq} = \frac{1}{h_0 4\pi R_0^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i - R_{i-1}}{4\pi\lambda_i \, R_i R_{i-1}} + \frac{1}{h_1 4\pi R_1^2}$$

n: nombre des couches sphériques.

$\boldsymbol{\lambda}_i$: conductivité thermique relative à la couche i.