PLAN DE LECON

CALCUL VECTORIEL

- **Objectifs spécifiques :**

A la fin de la séance l'étudiant doit être capable de :

Comprendre la notion de vecteur et ses propriétés.

- **Pré requis :**

L'étudiant est supposé connaître :

- Les outils mathématiques.
- Programme de Bac Technique.

- **Auditeurs :**

Etudiants des I.S.E.T.

Profil : Génie Mécanique.

Option : Tronc commun.

Niveau : L1/S1.

- **Durée :** Une séance de 1^h : 30
- **Evaluation :** - Formative au cours de la séance
  - Sommative : Test d'évaluation.
- **Matériels didactiques et méthodologie :**
  - Tableau
  - Méthode interrogative

Chap.0 : CALCUL VECTORIEL

I. Bipoint

1. *Définition*

On appelle *bipoint* AB ou (A, B) l'ensemble ordonné des deux points A et B pris dans cet ordre.

On appelle *norme du bipoint* AB, la valeur absolue qui définit la longueur du segment [AB] ; on note ||AB|| ou AB

2. *Représentation d'un bipoint*

Un *bipoint* (A, B) est représenté par un segment de droite orienté de l'origine A vers l'extrémité B du bipoint.

3. *Caractéristiques*

Le bipoint AB peut être défini géométriquement par:

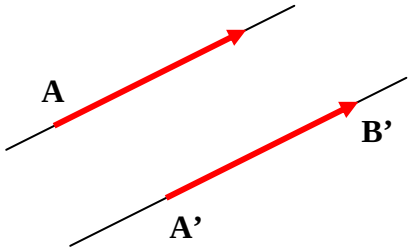
- Son origine : A;
- Son support: la droite x'x;
- Son sens de A vers B;
- Sa norme ||AB||.

Il existe un seul représentant unique

4. *Bipoints équipollents*

Deux bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents s'ils ont :

- Des supports parallèles
- Même sens
- Même norme



II. Vecteur

1. *Définition*

L'ensemble des bipoints équipollents au bipoint (A, B) constitue une classe d'équipollence appelé vecteur noté $\vec{v}$.

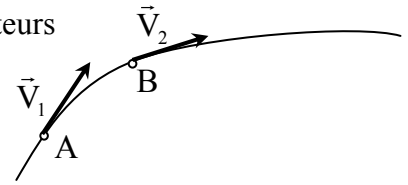
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si les bipoints qui les représentent sont équipollents.

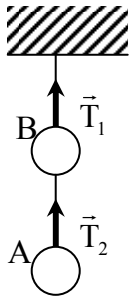
Remarques :

- Si son point d'application est quelconque, le vecteur est dit **libre**.
- Si son point d'application A est fixe, le vecteur est dit **lié (pointeur)** et s'écrit $(A,\vec{v})$.

Exemples :

$(A,\vec{v}_1)$; $(B,\vec{v}_2)$; $(A,\vec{T}_1)$ sont des pointeurs

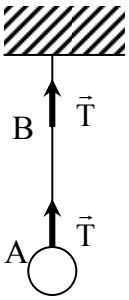




- Si son point d'application A est libre sur un support (Δ) le vecteur est dit **glissant (glisseur)** et s'écrit $(\Delta,\vec{v})$

Exemple

$(\Delta,\vec{T})$ est un glisseur



2. *Addition*

Propriétés de l'addition de deux vecteurs :

- Commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativité : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
- $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

3. *Multiplication par un scalaire*

La multiplication du vecteur $\vec{v}$ par un scalaire k est le vecteur noté $k.\vec{v}$ et défini par :

- Si k = 0 alors $k.\vec{v} = \vec{0}$

- Si k ≠0 alors le vecteur $k.\vec{v}$ a même direction que le vecteur $\vec{v}$. De plus, si k est positif, il est de même sens que le vecteur $\vec{v}$ et si k est négatif, il est de sens contraire.

Propriétés de multiplication de deux vecteurs :

- $\lambda(\mu.\vec{v}) = (\lambda.\mu).\vec{v}$
- $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$
- $(\lambda+\mu).\,\vec{v} = \lambda.\vec{v} + \mu.\vec{v}$

4. ***Base et repère :***

On appelle base de l'espace vectoriel (E) de dimension 3, tout triplet de vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ tel que tout vecteur $\vec{v}$ de (E) puisse d'écrire de façon unique :

$$\vec{v} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$

Les réels X, Y et Z sont les composantes de $\vec{v}$ dans la base B $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on note : $\vec{v} = \left|\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right.$

Un repère peut être défini comme un duo formé d'un point et d'une base. Par exemple : R(O, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$).

O est l'origine du repère R, et $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est la base associée à ce repère.

III. Produit scalaire

1. ***Définition***

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel suivant, noté $\vec{u}.\vec{v}$:

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

2. ***Propriétés***

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\lambda\vec{u}.\mu\vec{v} = \lambda\mu\,\vec{u}.\vec{v}$
- $\vec{v}^2 = \vec{v}.\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} \perp \vec{v}$

Si $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ sont les vecteurs unitaires d'une base orthonormé alors : $\left|\begin{matrix} \vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = 1 \\ \vec{x}.\vec{y} = \vec{y}.\vec{z} = \vec{x}.\vec{z} = 0 \end{matrix}\right.$

3. . Expression analytique du produit scalaire

Dans une base orthonormée, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{vmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{vmatrix}$ est :

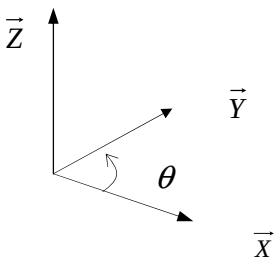
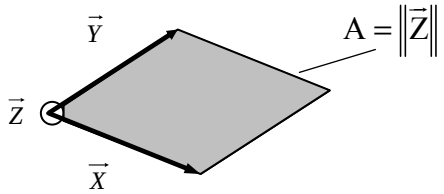
$$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

Remarque : Le produit scalaire de 2 vecteurs est un nombre réel

IV. Produit vectoriel

1. Définition

Le tableau ci – dessous éclaircit la notion du produit vectoriel

Géométrique	**Analytique**
$\vec{X} \wedge \vec{Y} = \vec{Z}$ est perpendiculaire à $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ est ***directe***   $\lVert\vec{Z}\rVert$ est l'air du parallélogramme construit sur $\vec{X}$ et $\vec{Y}$	$\vec{X} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} = {}_B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\vec{Y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k} = {}_B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\vec{X} \wedge \vec{Y} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ ***Rappel*** : Le déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$ $\lVert\vec{Z}\rVert = \lVert\vec{X} \wedge \vec{Y}\rVert = \lVert\vec{X}\rVert \times \lVert\vec{Y}\rVert \times \mathrm{Sin}(\vec{X}, \vec{Y})$

2. ***Propriétés :***

- Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = - \vec{v} \wedge \vec{u}$
- Distributivité par rapport à l'addition vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
- Multiplication par un réel : $\lambda\vec{u} \wedge \mu\vec{v} = \lambda\mu\ \vec{u} \wedge \vec{v}$
- Cas de nullité :
  - Un des vecteurs = 0
  - Les vecteurs sont colinéaires $\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) = \vec{0}$

3. ***Expression analytique***

Dans une base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, si $\vec{X} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ et $\vec{Y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$, alors on aura :

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = (x_2.y_3 - x_3.y_2)\vec{i} + (x_3.y_1 - x_1.y_3)\vec{j} + (x_1.y_2 - x_2.y_1)\vec{k}$$

3.1 Méthode de calcul :

Calcul à effectuer: $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}$

Première composante : On barre la première ligne et on calcule le déterminant 2*2 restant:

$$\begin{vmatrix} \cancel{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \cancel{y_1} \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2y_3 - x_3y_2 \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ ? \\ ? \end{vmatrix}$$

Deuxième composante : On barre la deuxième ligne et on calcule **l'opposé** du déterminant 2*2 restant:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ \cancel{x_2} \\ x_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} y_1 \\ \cancel{y_2} \\ y_3 \end{vmatrix} \rightarrow -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = -(x_1y_3 - x_3y_1) \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ ? \end{vmatrix}$$

Troisième composante : On barre la troisième ligne et on calcule le déterminant 2*2 restant:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cancel{x_3} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cancel{y_3} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{vmatrix}$$

NB : Le résultat du produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur perpendiculaire aux deux vecteurs.

4. Double produit vectoriel

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w}).\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$

$\vec{1} \wedge (\vec{2} \wedge \vec{3}) = (\vec{1}.\vec{3}).\vec{2} - (\vec{1}.\vec{2}).\vec{3}$

V. Produit mixte

1. Définition

Le produit mixte des 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre réel noté $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tel que :

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$

2. Propriétés

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$
- $(\vec{u}+\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}', \vec{v}, \vec{w})$
- $(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}, \gamma\vec{w}) = \lambda\mu\gamma(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

3. *Expression analytique du produit mixte*

Dans une base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le produit mixte de trois vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{vmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{vmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{vmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{vmatrix}$ se calcule à partir du déterminant suivant :

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = X_1Y_2Z_3 + Y_1Z_2X_3 + Z_1X_2Y_3 - Y_1X_2Z_3 - Z_1Y_2X_3 - X_1Z_2Y_3$$

VI. Moment d'un vecteur par rapport à un point

1. Définition

Le moment par rapport à un point P d'un vecteur $\vec{v}$ de point d'application A est par définition :

$$\vec{M}_p(\vec{v}) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{v}$$

2. Propriété

Relation des moments d'un vecteur en deux points différents :

$$\vec{M}_Q(\vec{v}) = \overrightarrow{QA} \wedge \vec{v} = (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA}) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{v} + \vec{M}_p(\vec{v})$$

D'où

$$\vec{M}_Q(\vec{v}) = \vec{M}_p(\vec{v}) + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{v}$$

$$\forall \quad (Q, P)$$

Cette relation est appelée relation de transport des moments.