PLAN DE LEÇON

CARACTÉRISTIQUES D'INERTIE DES SOLIDES

❖ **Objectifs spécifiques :**

1. Déterminer le centre de gravité d'un solide.

2. Ecrire la matrice d'inertie d'un solide par rapport à un repère.

3. Ecrire la matrice d'inertie d'un solide réel.

❖ **Motivation :**

En s'appuyant sur les notions vues en mécanique générale en 1er semestre l'étudiant essayera de déterminer la matrice d'inertie d'un solide

❖ **Pré acquis :**

- calcul intégral simple
- notions de physique.

❖ **Moyens d'enseignement** :

- tableau,

❖ **Auditeurs :**

Etudiants des I.S.E.T.

Profil : Génie Mécanique.

Option : Tronc commun.

Niveau : L1/S2.

❖ **Durée :** 6 séances de 1^{h} : 30

❖ **Evaluation :** - Formative au cours de la séance (TD N°6)

- Sommative : Test d'évaluation.

Chap.5: CARACTERISTIQUES D'INERTIE DES SOLIDES

La géométrie des masses permet de déterminer le centre de gravité et la matrice d'inertie d'un solide, notions utilisées dans les chapitres suivants.

I- Centre d'inertie – Centre de masse –centre de gravité :

Pour un solide homogène, où l'accélération de pesanteur est constante, les trois centres sont confondus :

1- Système discret.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i} \;;\; M = \sum_{i=i}^{n} m_i$$

G est le ***barycentre*** des points P_i affectés des masses m_i .

2- Système continu.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} . \int_S \overrightarrow{OP}.dm \Rightarrow x_G = \frac{1}{M} \int_S x\ dm \;;\; y_G = \frac{1}{M} \int_S y\ dm \text{ et } z_G = \frac{1}{M} \int_S z\ dm$$

Cas Particulier des solides homogènes

Nature du solide	Masse spécifique	Masse	Centre d'inertie
Ligne L Elément dl	Masse linéique $dm = \lambda.dl$	$m = \lambda.\int_L dl$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{L} \cdot \int_L \overrightarrow{OP}.dl$
Surface S Elément ds	Masse surfacique $dm = \sigma.ds$	$m = \sigma.\iint_S ds$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \cdot \iint_S \overrightarrow{OP}.ds$
Volume V Elément dv	Masse volumique $dm = \rho.dv$	$m = \rho.\iiint_V dv$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V} \cdot \iiint_V \overrightarrow{OP}.dv$

3- Exemples :

3.1 Cône de révolution :

Le centre d'inertie d'un cône de révolution de rayon R ,de hauteur h , plein et homogène

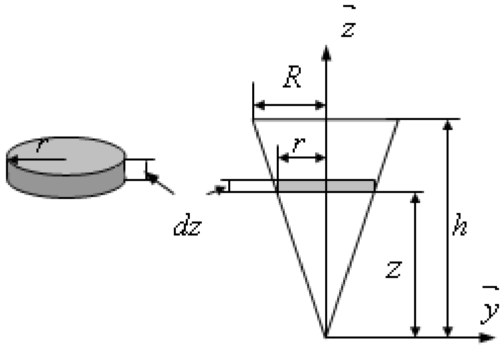
Le volume v du cône est $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$$z_G = \frac{1}{V}\int_E z\, dv$$

$$dv = \pi r^2 dz$$

$$tg\alpha = \frac{R}{h} = \frac{r}{z} \Rightarrow r = \frac{R}{h}z\ ;$$

finalement $z_G = \frac{1}{V}\int_E \pi \frac{R^2}{h^2} z^3\, dz \Rightarrow \boxed{z_G = \frac{3}{4}h}$



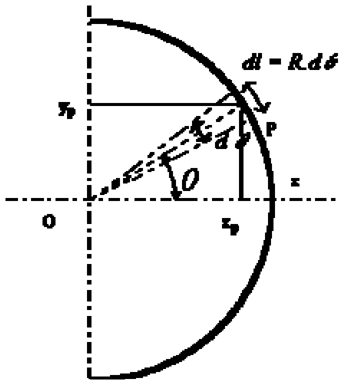
3.2 Demi-cerceau :

$$P\begin{cases} x_P = R\, Cos\theta \\ y_P = R\, Sin\theta \end{cases}$$

$$L = \pi\ R$$

$$L\, x_G = \int_L x_P dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\, Cos\theta\ R\, d\theta = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Cos\theta\, d\theta = 2\ R^2$$

$$L\, y_G = \int_L y_P dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\, Sin\theta\ R\, d\theta = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Sin\theta\, d\theta = 0$$



d'ou $\boxed{\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x_G = \frac{2R}{\pi} \\ y_G = 0 \end{cases}}$

II- Théorème de Guldin :

Les deux théorèmes de Guldin ne sont valables que pour le cas de courbe plane ou surface plane.

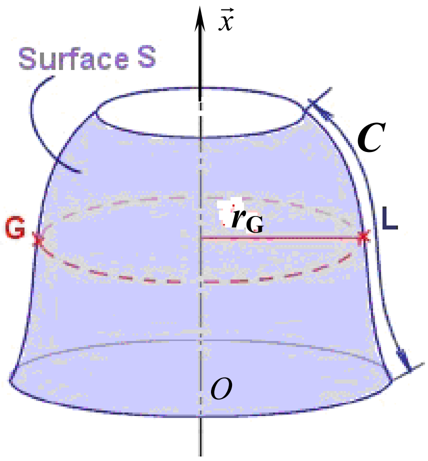
1- <u>Premier théorème :</u>

Dans un plan π, considérons une courbe C de longueur L et un axe $(O, \vec{x})$ne traversant pas, la position du centre de gravité G de cette courbe est donnée par

$$\boxed{S = 2\pi \cdot r_G \cdot L}$$

r_G : distance séparant G de $(O, \vec{x})$.

S : aire engendrée par C en tournant autour de $(O, \vec{x})$.



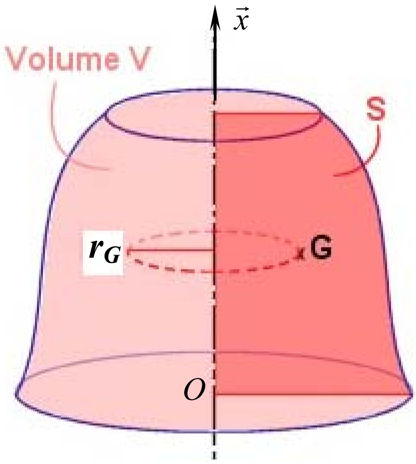
2- <u>Deuxième théorème :</u>

Dans un plan π, considérons une surface d'air S et un axe $(O,\vec{x})$ ne traversant pas, la position du centre de gravité G de cette surface est donnée par

$$\boxed{V = 2\pi \cdot r_G \cdot S}$$

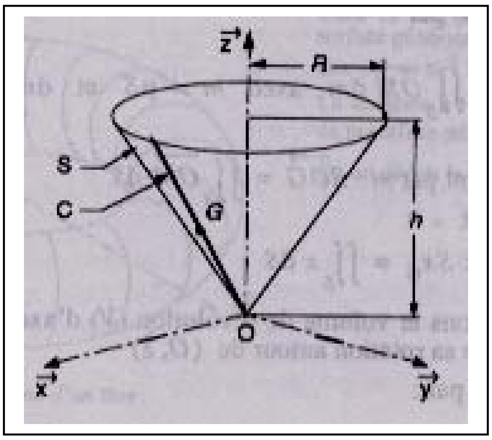
r_G : distance séparant G de $(O,\vec{x})$.

V : volume engendré par S en tournant autour de $(O,\vec{x})$.



III- Applications :

1- Déterminer l'air d'une surface conique (S) de hauteur h et de rayon R



<u>Correction :</u>

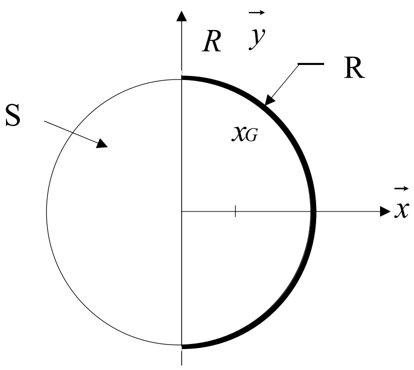
La longueur : $L = \sqrt{R^2 + h^2}$

Le centre d'inertie : $x_G = \frac{R}{2}$

La section : $S = 2\pi L x_G$

Finalement $\boxed{S = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}}$

2- Déterminer la position du centre de gravité G d'un demi-cerceau.



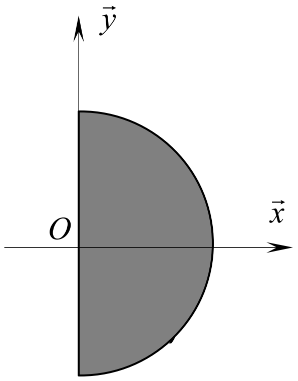
<u>Correction :</u>

La longueur du demi-cercle : $L = \pi R$

La surface générée du demi-cercle : $S = 4\pi R^2$

Appliquant le théorème de GULDIN $\Rightarrow$ $\boxed{x_G = \frac{2R}{\pi}}$

3- Déterminer la position du centre de gravité G d'une plaque demi-circulaire de rayon R et de section S.



Correction :

L'axe $\vec{Ox}$ coupe la plaque en deux morceaux identiques

Le volume $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

La surface $S=\frac{\pi}{2}R^2$ finalement $\boxed{x_G = \frac{4R}{3\pi}}$

4- Déterminer le volume d'un Tore

Correction :

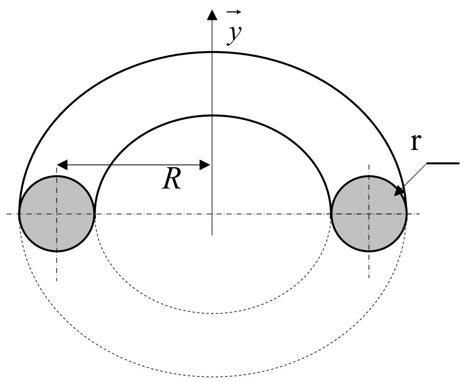
Déterminer le volume d'un tore (V)

de rayons r *et* R.

La surface $S=\pi R^2$

Le volume $V=2\pi\pi r^2 R$

$$\boxed{V = 2\pi^2 r^2 R}$$



5- Le volant représenté figure **1** est caractérisé par sa masse m et son rayon R. Il comporte un trou circulaire centré en A ($OA = a$) et de rayon r. Déterminer le centre d'inertie G du volant.

6- Un solide (S) homogène de masse M est constitué par un cylindre plein de hauteur H, de rayon R et un cône de rayon R et de hauteur h. Le cylindre et le cône sont assemblés par soudure comme l'indique la figure **2**

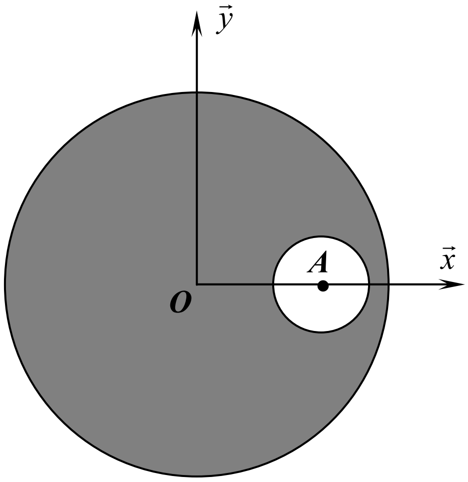


Fig.1

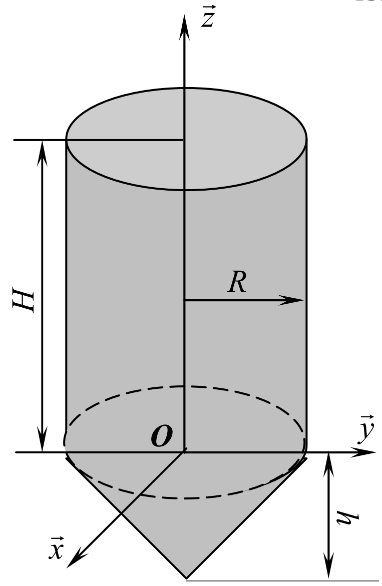


Fig.2

IV- Matrice d'inertie d'un solide (S).

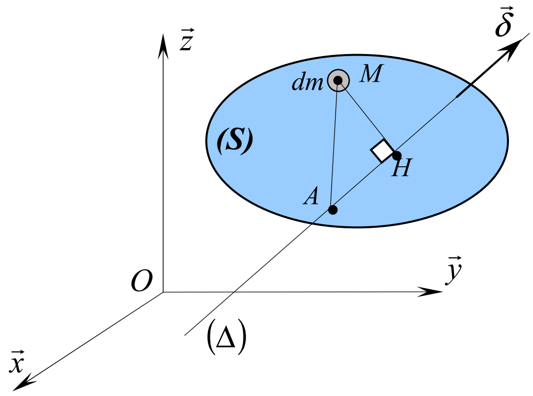
1. *Moment d'inertie de (S) par rapport un point.*

Etant donné un solide (S) de masse m .

On appelle moment d'inertie du solide (S)

par rapport à un point A , la quantité positive :

$$\boxed{I_A(S)=\int_S \overrightarrow{AM}^2\, dm}$$



2. *Moment d'inertie de (S) par rapport un axe (Δ).*

On appelle moment d'inertie du solide (S)

par rapport à un axe (Δ), la quantité positive :

$$\boxed{I_\Delta(S)=\int_S \overrightarrow{HM}^2\, dm}$$

3. *Expressions analytiques dans un repère orthonormé :*

Un point M d'un solide (S) ayant pour coordonnées x,y,z dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

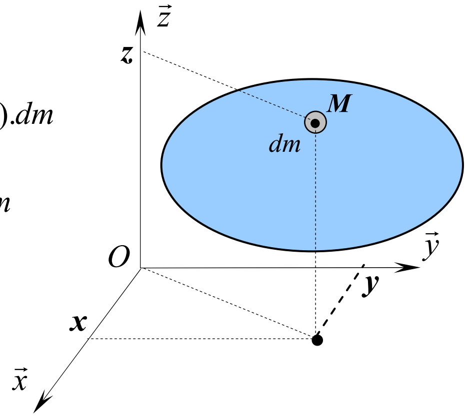
$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$$

Moment d'inertie de S /(point O) : $I(S/O) = \int_{M\in S} (x^2 + y^2 + z^2).dm$

Moment d'inertie de S /(axe Oz) : $I(S/Oz) = \int_{M\in S} (x^2 + y^2).dm$

Moment d'inertie de S /[plan ($O,\vec{x},\vec{y}$)] : $I(S/OXY) = \int_{M\in S} (z^2).dm$

Produit d'inertie de S /(axex :Ox et Oy) $J(S/xoy) = \int_{M\in S} x.y.dm$



4. *Matrice d'inertie d'un solide (S) en O :*

La matrice d'inertie s'écrit sous la forme suivante :

$$[I_{(S)}]_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{vmatrix} Iox & -J(xoy) & -J(xoz) \\ -J(xoy) & Ioy & -J(yoz) \\ -J(xoz) & -J(yoz) & Ioz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm & -\int_S xy.dm & -\int_S xz.dm \\ -\int_S xy.dm & \int_S (x^2+z^2).dm & -\int_S yz.dm \\ -\int_S xz.dm & -\int_S yz.dm & \int_S (x^2+y^2).dm \end{vmatrix}$$

Autre notation de la matrice d'inertie

$$[I_{(S)}]_O = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

A, B et ***C*** : Moments d'inertie par rapport $(O,\vec{x});(O,\vec{y})et(O,\vec{z})$

D, E et ***F*** : Produits d'inertie

Si le solide admet des plans de symétrie :

Si $(O,\vec{x},\vec{y})$ plan de symétrie, alors z varie de ± z_0 donc :

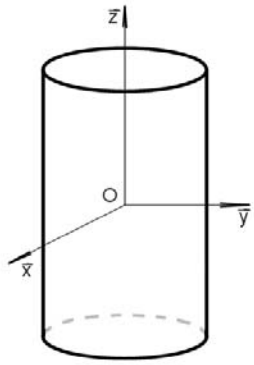
$$E = \int_S xz.dm = 0 \quad \text{et} \quad D = \int_S yz.dm = 0$$

Si $(O,\vec{y},\vec{z})$ plan de symétrie, alors x varie de ± x_0 donc :

$$E = \int_S xz.dm = 0 \quad \text{et} \quad F = \int_S xy.dm = 0$$

Si $(O,\vec{x},\vec{z})$ plan de symétrie, alors y varie de ± y_0 donc :

$$F = \int_S xy.dm = 0 \quad \text{et} \quad D = \int_S yz.dm = 0$$



D'autre part si le solide admet $(O,\vec{x},\vec{y})$ comme plan de symétrie alors l'axe $(O,\vec{z})$ est un axe principal d'inertie. Si $(O,\vec{x})$ joue le même rôle que $(O,\vec{y})$ alors ***A=B***

5. *Moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe (Δ) quelconque passant par un point O où la matrice d'inertie est connue.*

On connaît la matrice d'inertie au point O : $[I_{(S)}]_O$

On veut calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ : $I(S/\Delta)$

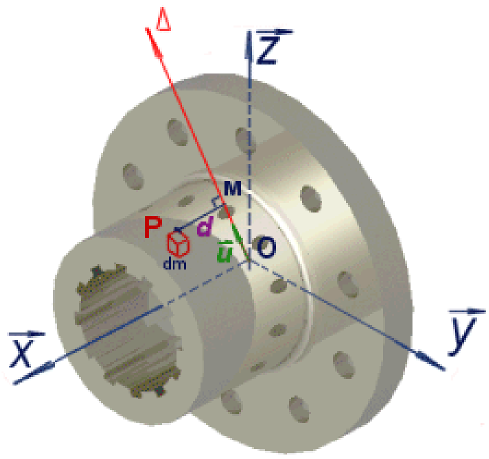
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_R \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$

La distance de P à Δ peut être exprimée par : $d = \left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right|$

$$I(S/\Delta) = \int_{P\in S} d^2.dm = \int_{P\in S} (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP})^2.dm$$

$$I(S/\Delta) = A.a^2 + B.b^2 + C.c^2 - 2.a.b.F - 2.b.c.D - 2.c.a.E$$

Autre expression : $I(S/\Delta) = {}^t\vec{u} \cdot \left[I_{(S)}\right]_O \cdot \vec{u}$



6. Théorème de Huygens :

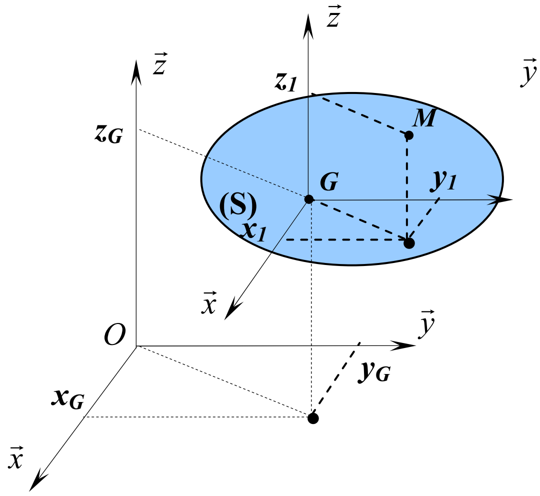
On connaît la matrice d'inertie de (S) dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. ***G*** est le centre d'inertie de (S).

$$\left[I_{(S)}\right]_G = \begin{vmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{vmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On veut calculer la matrice d'inertie de (S) $\left[I_{(S)}\right]_O$ dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en fonction de $\left[I_{(S)}\right]_G$

On donne :

$$\left(\overrightarrow{OG}\right) = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}, \left(\overrightarrow{OM}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \left(\overrightarrow{GM}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$



On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} x_G + x_1 \\ y_G + y_1 \\ z_G + z_1 \end{pmatrix}$

- Le moment d'inertie par rapport à $(G,\vec{x})$: $A_G = \int_{M\in S} \left(y_1^{\,2} + z_1^{\,2}\right)\cdot dm$
- Calculons le moment d'inertie par rapport à $(O,\vec{x})$: A

Par définition : $A = \int_{M\in S} \left(y^2 + z^2\right)\cdot dm$

$$A = \int_{M\in S} \left(y^2 + z^2\right)\cdot dm \;=\; \int_{M\in S} \left[\;(y_1 + y_G)^2 + \cdot(z_1 + z_G)^2\;\right] dm$$

$$= \int_{M\in S} \left(y_1^{\,2} + z_1^{\,2}\right)\cdot dm + \int_{M\in S} \left(y_G^{\,2} + z_G^{\,2}\right)\cdot dm + 2\cdot y_G \int_{M\in S} y_1 \cdot dm + 2\cdot z_G \int_{M\in S} z_1 \cdot dm$$

Le point unique G (centre d'inertie de (S)) défini par la relation : $\int_S \overrightarrow{GM}\;\; dm \;=\; \vec{0}$

$$\Rightarrow \int_{M\in S} x_1 \cdot dm = \int_{M\in S} y_1 \cdot dm = \int_{M\in S} z_1 \cdot dm = 0$$

$$\Rightarrow A = \int_{M\in S} \left(y_1^{\,2} + z_1^{\,2}\right)\cdot dm + \int_{M\in S} \left(y_G^{\,2} + z_G^{\,2}\right)\cdot dm \;\Rightarrow A = A_G + m\cdot\left(y_G^{\,2} + z_G^{\,2}\right)$$

- De même : $B = B_G + m\cdot\left(x_G^{\,2} + z_G^{\,2}\right)$

  $C = C_G + m\cdot\left(x_G^{\,2} + y_G^{\,2}\right)$

- En suite : $D = D_G + m\cdot y_G \cdot z_G$

  $E = E_G + m\cdot x_G \cdot z_G$

  $F = D_G + m\cdot x_G \cdot y_G$

*7- **Base principale d'inertie.***

7.1 Définition :

- La matrice d'inertie possède trois vecteurs propres orthogonaux deux à deux, puisqu'elle est symétrique.
- Donc il existe en tout point, au moins une base ortuonomée directe, appelée, base principale d'inertie dans laquelle la matrice est diagonale.
- Soit $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ la base principale d'inertie de (S) en ***O*** :

$$\left[I_{(S)}\right]_O = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$(O,\vec{x});(O,\vec{y});(O,\vec{z})$: sont les axes principaux d'inertie de (S) en O.
A, B, C : sont les moments principaux d'inertie de (S) en O

7.2 Détermination des axes principaux d'inertie :

RÈGLES : (i) chaque plan de symétrie matérielle passant par O donne lieu à un axe principal d'inertie. Si par exemple le plan $(O,\vec{y},\vec{z})$ est un plan de symétrie alors $(O,\vec{x})$ est un axe principal d'inertie.

(ii) ayant obtenu deux axes propres d'inertie soit par exemple $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors le troisième axe sera obtenu par un simple produit vectoriel $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$

7.3 Matrice centrale d'inertie :

Lorsque la matrice est calculée au point G, centre de gravité du solide, elle est dite matrice centrale d'inertie.
Lorsque la matrice est calculée au point G est diagonale,alors elle est dite matrice centrale principale d'inertie.

V. Application :

1-DETERMINATION DES CONSTANTES D'INERTIE D'UN ARBRE ETAGE (DS 2009) :

l'arbre comme le montre la perspective figure ***1*** (homogène de masse volumique ρ) est constitué de deux cylindres (un premier cylindre de masse m_1,de rayon R_1 et de hauteur H_1) et (un deuxième cylindre de masse m_2,de rayon R_2et de hauteur H_2) comme le montre la figure **2**.

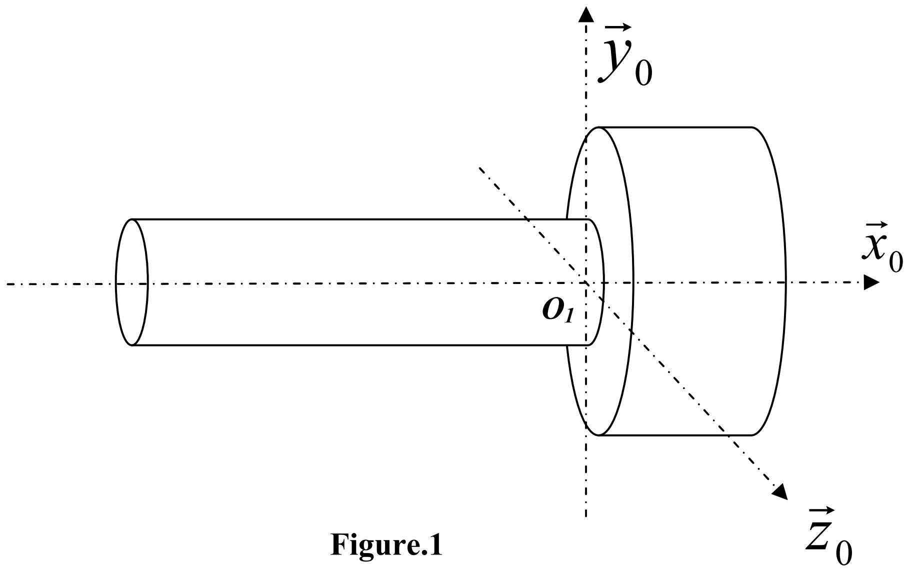


Figure.1

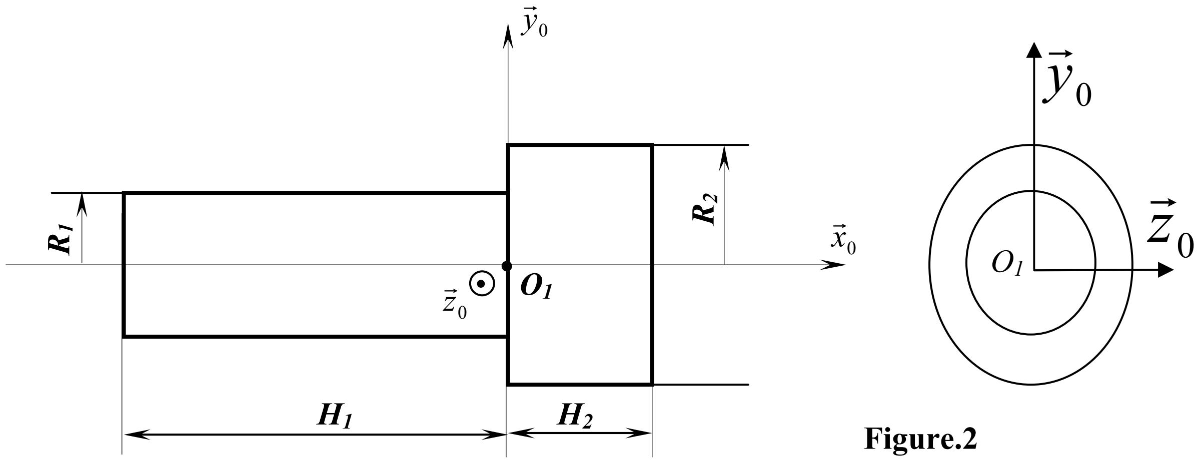


Figure.2

1) *En considérant que l'arbre étagé est un système discret, former par la liaison des deux cylindres, Donner dans le repère $(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ la position du centre de gravité de l'arbre (1)en appliquant la formule* $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OG_i}$; $M = \sum_{i=i}^{n} m_i$.

2) *Déterminer la matrice centrale principale d'inertie du cylindre **(1)** en G_1, relativement à la base* $(G_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ $\left[I_{(cylindre1)}\right]_{G_1} = \begin{vmatrix} A_{G_1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{G_1} & 0 \\ 0 & 0 & B_{G_1} \end{vmatrix}_{(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ *.puis exprimer la en O_1 en utilisant le théorème de Huygens.* $\left[I_{(cylinres1)}\right]_{O_1} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{vmatrix}_{(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

- *Sachant que* $2B_{G1} = A_{G1} + 2\int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} x^2 dm$
- pour le calcul de A_{G1}, nous exprimons l'éléments du volume du cylindre par :

dv= r. dr.dθ .dx

3) *Déterminer la matrice centrale principale d'inertie du cylindre* ***(2)*** *en G_2, relativement à la base* $(G_2, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ $\left[I_{(cylindre2)}\right]_{G_2} = \begin{vmatrix} A_{G_2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{G_2} & 0 \\ 0 & 0 & B_{G_2} \end{vmatrix}_{(G_2,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ *puis exprimer la en O_1.*

en utilisant le théorème de Huygens. $\left[I_{(cylinres2)}\right]_{O_1} = \begin{vmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{vmatrix}_{(O_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

- *Sachant que* $2B_{G2} = A_{G2} + 2\int_{-\frac{H2}{2}}^{\frac{H_2}{2}} x^2 dm$
- pour le calcul de A_{G2}, nous exprimons l' éléments du volume du cylindre par :

dv= r. dr.dθ .dx

4) *En déduire, dans la base* $(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ *la matrice d'inertie principale et centrale de l'arbre* ***(1)*** *en O_1.*

$$\left[I_{(S)}\right]_{O_1} = \left[I_{(cylinres1)}\right]_{O_1} + \left[I_{(cylinres2)}\right]_{O_1} = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}_{(O_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Correction :

Question N°1

$\overrightarrow{O_1G} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n=2} m_i\overrightarrow{O_iG_i} = \frac{1}{M}(m_1\overrightarrow{O_iG_i} + m_2\overrightarrow{O_iG_2})$

Avec $\begin{cases} M = (m_1 + m_2 \\ \overrightarrow{O_iG_i} = -\frac{H_1}{2}.\vec{x}_0 \\ \overrightarrow{O_1G_2} = \frac{H_2}{2}..\vec{x}_0 \end{cases}$

Donc :

$\overrightarrow{O_1G} = \frac{m_1\left(-\frac{H_1}{2}\right) + m_2\left(\frac{H_2}{2}\right)}{(m_1 + m_2)}\overrightarrow{x_0}$

$\overrightarrow{O_1G} = \frac{m_2H_2 - m_1H_1}{2(m_1 + m_2)}\overrightarrow{x_0}$

Question 2 :

$[I_{cy(1)}]_{G_1} = \begin{bmatrix} A_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{G1} & 0 \\ 0 & 0 & B_{G1} \end{bmatrix}_{G_1}$

$A_{G1} = \int (y^2 + z^2)\,dm = \int_0^{R_1} r^2\,dm = e\int_0^{R_1} r^2\,dv = \rho\int_{-\frac{H1}{2}}^{\frac{H1}{2}}\int_0^{R_1}\int_0^{2\pi} r^2 r\,dr\,d\theta\,dx$

$= \rho\int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} dx\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{R_1} r^3\,dr = \rho.\left[x\right]_{-\frac{H1}{2}}^{\frac{H1}{2}}.\left[\theta\right]_0^{2\pi}.\frac{1}{4}.\left[r^4\right]_0^{R_1}$

$A_{G1} = \rho.2\pi.H_1.\frac{1}{4}R_1^4$ Or $m_1 - \rho.\pi R_1^2.H_1$

Donc : $\frac{A_{G1}}{m_1} = \ = \frac{R_1^2}{2} \Rightarrow A_{G1} = \frac{m_1R_1^2}{2}$

$2\,B_{G1} = A_{G1} + 2\int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} x^2\,dm$, *calculons alors* $\int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} x^2\,dm$

$\int_{-\frac{H1}{2}}^{\frac{H1}{2}} x^2 dm = \rho\int_{-\frac{H1}{2}}^{\frac{H1}{2}} x^2\,dv = \rho.\int_{-\frac{H1}{2}}^{\frac{H1}{2}} x^2(\pi R_1^2.dx)$

$$\int_{-\frac{H1}{2}}^{\frac{H1}{2}} x^2 dm = \rho\pi R_1^2 \int_{-\frac{H1}{2}}^{\frac{H1}{2}} x^2\, dx = \rho\,.\pi R_1^2\, \frac{1}{3}\,[x^3]_{-\frac{H1}{2}}^{\frac{H1}{2}}$$

$$= \int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} x^2 dm = \rho\pi R_1^2 \int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} x^2\, dx = \rho\,.\pi R_1^2\, \frac{1}{3}\,[x^3]_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} = \frac{\rho.\pi.R_1^2}{12}$$

Or $\dfrac{\int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} x^2\, dm}{m_1} = \dfrac{\rho\pi R_1^2\, H_1^2}{12.\rho.\pi.R_1^2\, H_1} = \dfrac{H_1^2}{12}$

Donc $\int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} x^2\, dm = \dfrac{m_1 H_1^2}{12}$

Par suite $B_{G1} = \dfrac{m_1 R_1^2}{4} + \dfrac{m_1 R_1^2}{12}$

Donc $[I_{cy(1)}]_{G_1} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 R_1^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 R_1^2}{4} + \frac{m_1 R_1^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 R_1^2}{4} + \frac{m_1 R_1^2}{12} \end{bmatrix}_{G_1}$

Transfert de la matrice d'inertie du cylindre (1) au point O_1 : $\overrightarrow{G_1 O_1} = \frac{H_1}{2}\,.\overrightarrow{x_0}$ donc

$A_{01} = A_{G1} = \frac{m_1 R_1^2}{2}$ **et** $B_{01} = B_{G1} + \left(\frac{H_1}{2}\right)^2 . m_1 = \frac{m_1 R_1^2}{4} + \frac{m_1 R_1^2}{3}$

Finalement :

$$[I_{cy(1)}]_{O_1} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 R_1^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 R_1^2}{4} + \frac{m_1 R_1^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 R_1^2}{4} + \frac{m_1 R_1^2}{3} \end{bmatrix}_{O_1}$$

Question (3) : matrice d'inertie $[I_{cy(2)}]_{G_2}$

Par analogie avec la question (2) on aura :

$$[I_{cy(2)}]_{G_2} = \begin{bmatrix} \frac{m_2 R_1^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 R_2^2}{4} + \frac{m_2 R_2^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 R_2^2}{4} + \frac{m_2 R_2^2}{12} \end{bmatrix}_{G_2}$$

Par analogie avec la réponse (2) au point 0_1

$$[I_{cy(2)}]_{0_1} = \begin{bmatrix} \frac{m_2 R_2^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 R_2^2}{4} + \frac{m_2 R_2^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 R_2^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2}{2} \end{bmatrix}_{0_1}$$

QUESTIONS (4)

$$[I(cylindre\ étage)]_{0_1} = [I\ cy(1)]_{0_1} + [I\ cy(2)]_{0_1}$$

Donc :

$$[I_{cy}]_{0_1} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}{4} + \frac{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}{4} + \frac{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}{3} \end{bmatrix}_0$$

2-DETERMINATION DES CONSTANTES D'INERTIE D'UN Cylindre évidé: (DS 2011)

On considère un cylindre de révolution (homogène de masse volumique ρ) comprenant un évidement cylindrique défini ci-dessous, comme le montre la perspective est constitué d'un premier cylindre de masse $\mathbf{m_1}$, de rayon $\mathbf{r_1=2d}$ et de hauteur **h** et d'un évidement c'est-à-dire un cylindre vide de masse $\mathbf{m_2}$, de rayon $r_2 = \frac{1}{2}d$ et de hauteur h comme le montre la figure **1**.

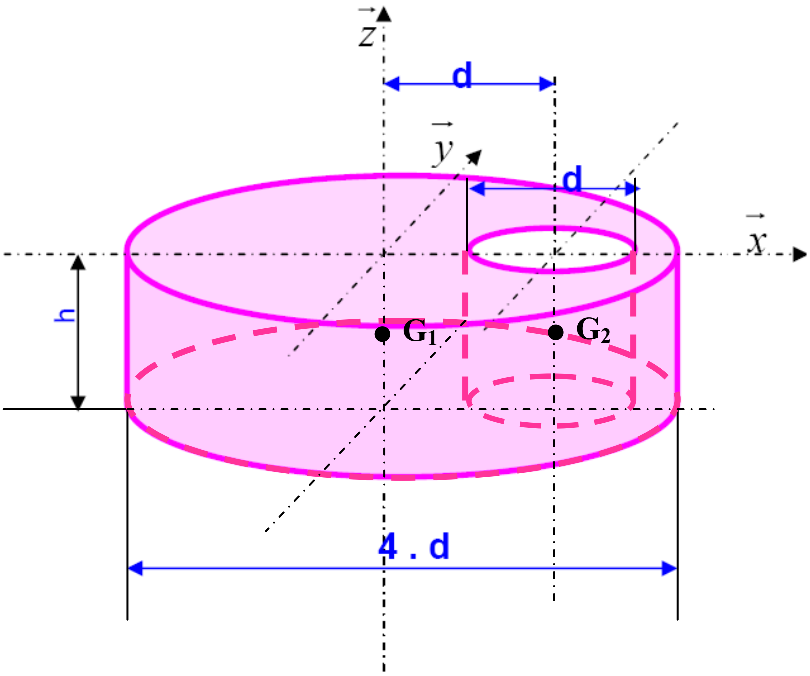


Figure.1

<u>Remarque</u> : la matrice d'inertie du solide dans ce cas se calcule comme la matrice d'inertie du cylindre plein moins celui du cylindre retiré « l'évidement » réduit au point G_1.

1) *Donner les coordonnés du centre de masse du premier cylindre de masse m_1, de rayon* $\mathbf{r_1=2d}$ *et de hauteur h dans le repère* $(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2) *Donner les coordonnés du centre de masse du cylindre vide de masse m_2, de rayon* $r_2 = \frac{d}{2}$ *et de hauteur* ***h***, *dans le repère* $(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

3) *En considérant que le cylindre évidé est un système discret, constitué d'un premier cylindre de masse m_1, de rayon* $\mathbf{r_1=2d}$ *et de hauteur h et d'un évidement c'est-à-dire un cylindre vide de masse m_2, de rayon* $r_2 = \frac{d}{2}$ *et de hauteur* ***h***, *Donner dans le repère* $(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *la position du centre de gravité du cylindre évidé en appliquant la formule* $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OG_i}$; $M = \sum_{i=i}^{n} m_i$.

4) *Déterminer la matrice centrale principale d'inertie du premier cylindre en G_1, relativement à la base* $(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ $\left[I_{(cylindre1)}\right]_{G_1} = \begin{vmatrix} A_{G_1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{G_1} & 0 \\ 0 & 0 & C_{G_1} \end{vmatrix}_{(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

- Calculer C_{G1}, nous exprimons l'élément du volume du cylindre par : ***dv= r. dr.dθ .dz***
- *Calculer* A_{G1} en fonction de m_1, d et h *Sachant que* $2A_{G1} = C_{G1} + 2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dm$
- Nous exprimons l'élément du volume du cylindre par $dv = \pi.r_1^2.dz$

5) *Sachant que la matrice centrale principale d'inertie de l'évidement « cylindre vide » en G_2, relativement à la base* $(G_2,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ $\left[I_{(cylindre2)}\right]_{G_2} = \begin{vmatrix} A_{G_2} & 0 & 0 \\ 0 & A_{G_2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{G_2} \end{vmatrix}_{(G_2,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

telque :

$$A_{G_2} = m_2\left(\frac{d^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right) \quad \text{et} \quad C_{G_2} = m_2.\frac{d^2}{8}$$

Exprimer alors la matrice d'inertie $\left[I_{(cylindre2)}\right]$ *en G_1 en utilisant le théorème de Huygens.* $\left[I_{(cylinres2)}\right]_{G_1} = \begin{vmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{vmatrix}_{(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ *Sachant que* $\overrightarrow{G_1G_2} = d.\vec{x}$

6) *En déduire, dans la base* $(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *la matrice d'inertie principale et centrale du cylindre évidé en G_1.*

$$\left[I_{(S)}\right]_{G_1} = \left[I_{(cylinre1)}\right]_{G_1} - \left[I_{(cylinre2)}\right]_{G_1} = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}_{(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Correction

1) Détermination du centre de masse du premier cylindre (masse $\mathbf{m_1}$ et de rayon $\mathbf{r_1}$ $=\mathbf{2d}$) dans le repère $(G_1, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$

le centre de masse est $G_1 \Rightarrow \overrightarrow{G_1G_1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

2) Les coordonnées du centre de masse du cylindre vide dans le repère $(G_1, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$, G_2 est le centre de masse avec $\overrightarrow{G_1G_2} = d\vec{x}$

3) Soit G le centre de gravité du cylindre évidé

$$\text{On a} \quad \overrightarrow{G_1G} = \frac{1}{M}(m_1\overrightarrow{G_1G_1} - m_2\overrightarrow{G_1G_2}$$

$$avec \begin{cases} M = m_1 - m_2 \\ \overrightarrow{G_1G_2} = d\vec{x} \end{cases}$$

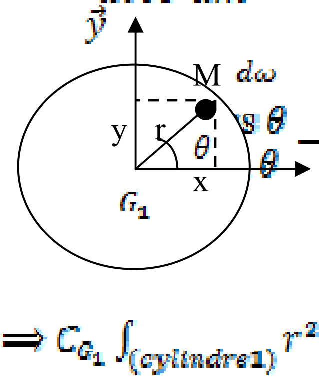
$$d'ou\ \overrightarrow{G_1G}\frac{1}{(m1\_m_2)}(m_1\vec{0} - m_2 d\vec{x})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{G_1G} = \frac{m_2}{m_1 - m_2}d\vec{x}$$

4) $on\ a \qquad [I_{(cylindre1)}]_{G_1} = \begin{bmatrix} A_{G_1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{G_1} & 0 \\ 0 & 0 & C_{G_1} \end{bmatrix}_{(G_1, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})}$

$$C_{G_1} = \int_{(cylindre\ 1)} (x^2 + y^2)$$

$$avec\ dm = \quad \delta dv = \delta r dr d\theta dz$$



$\longrightarrow \{x^2 + y^2 = r^2$

$\vec{x}$

$$\Rightarrow C_{G_1} \int_{(cylindre1)} r^2 dm = \int_{(cylindre1)} r^2 \delta r dr d\theta dz$$

$$C_{G_1} = \delta \int_0^{2d} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dz$$

$$C_{G_1} = \delta \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^{2d} [\theta]_0^{2\pi} [z]_{-h/2}^{h/2}$$

$$\rightarrow C_{G_1} = \delta \frac{1}{4} (2d)^4 2\pi h$$

$$\Rightarrow C_{G_1} = 8\delta\pi d^4 h$$

$$\delta = \frac{m_1}{v_1} = \frac{m_1}{\pi(2d)^2 h} = \frac{m_1}{4\pi d^2 h}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad C_{G_1} = 8\frac{m_1}{4\pi d^2 h}\pi d^4 h = 2m_1 d^2}$$

$$2A_{G_1} = C_{G_1} + 2\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dm \Rightarrow A_{G_1} = \frac{C_{G_1}}{2} + \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dm$$

$$Avec \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^2\, dm = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \delta dv$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \delta\pi r_1^2 dz$$

$$= \delta\pi r_1^2 \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$\delta\pi r_1^2 \left[\frac{1}{3} z^3\right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \delta\pi r_1^2 \frac{1}{3}\left[(\frac{h}{2})^3 - (-\frac{h}{2})^3\right]$$

$$= \frac{\delta\pi r_1^2}{3} \frac{2h^3}{8} \frac{\delta\pi\, r_1^2 h^3}{12}$$

$$Avec \quad r_1 = 2d \quad et \quad \delta = \frac{m_1}{4\pi d^2 h}$$

$$d'ou \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dm - \frac{m_1}{4\pi d^2 h} \frac{\pi(2d)^2 h^3}{12} - \frac{m_1 h^2}{12}$$

$$d'ou \quad A_{G_1} = m_1 d^2 + \frac{m_1 h^2}{12}$$

$$d'ou \left[I_{(cylindre1)}\right]_{G_1} = \begin{bmatrix} m_1 d^2 + \frac{m_1 h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m_1 d^2 + \frac{m_1 h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 2m_1 d^2 \end{bmatrix}_{(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5) $on\ a \quad \overrightarrow{G_1 G_2} = d\vec{x}$

$$A_2 = A_{G_2} + m_2 \times 0 = A_{G_2} = m_2\left(\frac{d^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right)$$

$$B_2 = B_{G_2} = A_{G_2} + m_2 d^2 = m_2\left(\frac{d^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right) + m_2 d^2$$

$$C_2 = C_{G_2} + m_2 d^2 = m_2 \frac{d^2}{8} + m_2 d^2 = \frac{9}{8} m_2 d^2$$

D’où :

$$\left[I_{(cylindre2)}\right]_{G_1} = \begin{bmatrix} m_2\left(\frac{d^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_2\left(\frac{17d^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{8} m_2 d^2 \end{bmatrix}_{(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

6) $\left[I_{(S)}\right]_{G1} = \left[I_{(cylindre1)}\right]_{G_1} - \left[I_{(cylindre2)}\right]_{G_1}$

$$\Rightarrow \quad \left[I_{(S)}\right]_{G1} = \begin{bmatrix} m_1 d^2 + \frac{m_1 h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m_1 d^2 + \frac{m_1 h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 2m_1 d^2 \end{bmatrix}_{(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} -$$

$$\begin{bmatrix} m_2\left(\frac{d^2}{16}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_2\left(\frac{17d^2}{16}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{8}m_2d^2 \end{bmatrix}_{(G_1,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$$

$$= \begin{bmatrix} m_1d^2+\frac{m_1h^2}{12}-m_2\left(\frac{d^2}{16}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_1d^2+\frac{m_1h^2}{12}-m_2\left(\frac{17d^2}{16}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2m_1d^2-\frac{9}{8}m_2d^2 \end{bmatrix}_{(G_1,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$$