PLAN DE LECON

CINETIQUE

❖ **Objectifs spécifiques :**

A la fin de la séance l'étudiant doit être capable de :

- ⇨ Déterminer le torseur cinétique d'un solide en mouvement par rapport à un repère.
- ⇨ Déterminer l'énergie cinétique d'un solide

❖ **Pré requis :**

L'étudiant est supposé connaître :

- Cinématique.
- Caractéristiques d'inertie d'un solide.

❖ **Auditeurs :**

Etudiants des I.S.E.T.

Profil : Génie Mécanique.

Option : Tronc commun.

Niveau : L1/S2.

❖ **Durée :** 3 séances de 1^h : 30

❖ **Evaluation :** - Formative au cours de la séance et TD N°7

- Sommative : Test d'évaluation.

❖ **Matériels didactiques et méthodologie :**

- Tableau
- Méthode interrogative
- Polycopiés
- Transparents

Chap. 6: CINETIQUE

La cinétique se construit à partir de la cinématique en introduisant la notion de masse. Les définitions et les résultats, que nous allons mettre en place serviront à écrire le principe fondamental de la dynamique, ainsi que le théorème de l'énergie cinétique. A la fin de ce chapitre l'étudiant doit être capable de déterminer les éléments de réduction du torseur cinétique en n'importe quel point appartenant au solide.

I. TORSEUR CINETIQUE :

1. *Définition :*

Le torseur cinétique de l'ensemble matériel (E) de centre d'inertie (G) dans son mouvement par rapport au repère R est, en un point A quelconque, le torseur suivant :

$$\{C(E/R)\} = \begin{Bmatrix} \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)dm \\ \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm \end{Bmatrix}_A$$

La résultante générale du torseur cinétique est appelée résultante cinétique (ou quantité de mouvement) et le moment résultant est appelé moment cinétique.

Le moment cinétique au point A du torseur $\{C(E/R)\}$ est noté habituellement : $\vec{\sigma}_A(E/R)$

- ***La résultante cinétique:*** $\vec{R}_c = \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)dm$
- ***Le moment cinétique au point*** A***:*** $\vec{\sigma}_A(E/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$

Remarque:

La vitesse d'un point ou d'un solide dépend du repère de référence choisi et donc le torseur cinétique dépend également du repère de référence choisi.

2. *Autre Expression du torseur cinétique :*

2.1. Résultante cinétique :

Soit O un point lié à R, et G le centre d'inertie de E. En admettant le principe de conservation de la masse, la résultante cinétique $\vec{R}_c$ (E/R) s'écrit :

$$\vec{R}_C(E/R) = \int_E \vec{V}(P/R)dm$$

$$= \int_E [\frac{d(\vec{OP})}{dt}]_R dm$$

$$= \frac{d}{dt/R}(\int_E \vec{OP}dm)$$

$$= \frac{d}{dt/R}(\int_E (\vec{OG} + \vec{GP})dm)$$ (On sait que le centre d'inertie G est le point tel que : $\int_{P\in E} \overrightarrow{GP}dm = \vec{0}$)

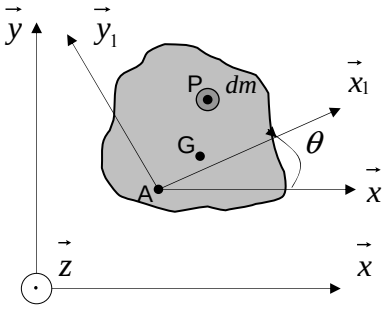
$$= \frac{d}{dt/R}(m \ \vec{OG})$$

$$= m\vec{V}(G/R)$$

Le torseur cinétique s'écrit donc : $\{C(E/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}_A(E/R) \end{Bmatrix}$

2.2. Moment cinétique :

i. Premier cas:



Soient $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère fixe et $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ un repère mobile lié au solide (S).

(G représente le centre de gravité de (S)).

On donne : $\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\theta}\vec{z}$ et

$$\vec{V}_P(S/R) = \vec{V}_A(S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP}$$

$$\vec{AP} \wedge \vec{V}_P(S/R) = \vec{AP} \wedge \vec{V}_A(S/R) + \vec{AP} \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP}]$$

$$\vec{AP} \wedge \vec{V}_P(S/R) = (\vec{AG} + \vec{GP}) \wedge \vec{V}_A(S/R) + \vec{AP} \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP}]$$

$$\vec{\sigma}_A(S/P) = \int \vec{AP} \wedge \vec{V}_P(S/R)dm = \underbrace{\int \vec{AG} \wedge \vec{V}_A(S/R)dm}_{1} + \underbrace{\int \vec{GP} \wedge \vec{V}_A(S/R)dm}_{2} + \underbrace{\int \vec{AP} \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP}]dm}_{3}$$

1 $\rightarrow$ $\int \vec{AG} \wedge \vec{V}_A(S/R)dm = m\vec{AG} \wedge \vec{V}_A(S/R)$

2 $\rightarrow$ $\int \overrightarrow{GP} \wedge \vec{V}_A(S/R) dm = \vec{0}$

3 $\rightarrow$ $\int \overrightarrow{AP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}\right] dm = \int \left(x_1\vec{x}_1 + y_1\vec{y}_1 + z\vec{z}\right) \wedge \left[\dot{\theta}\vec{z} \wedge \left(x_1\vec{x}_1 + y_1\vec{y}_1 + z\vec{z}\right)\right] dm$

$$= \dot{\theta} \int \left(x_1\vec{x}_1 + y_1\vec{y}_1 + z\vec{z}\right) \wedge \left(x_1\vec{y}_1 - y_1\vec{x}_1\right) dm$$

$$= \dot{\theta}\left[\int -x_1 z dm \vec{x}_1 - \int z y_1 dm \vec{y}_1 + \int (x_1^2 + y_1^2) dm \vec{z}\right]$$

$$= \dot{\theta}\left[-E\vec{x}_1 - D\vec{y}_1 + C\vec{z}\right]$$

Finalement on obtient $\vec{\sigma}_A(S/R) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_A(S/R) + \dot{\theta}\left[-E\vec{x}_1 - D\vec{y}_1 + C\vec{z}\right]$

ii. Deuxième cas (cas général) :

Le mouvement de (S) par rapport à R est quelconque. L'intégrale $\left[\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}\right] dm$ obtenue lors de la décomposition du moment cinétique représente l'opérateur d'inertie de (S) au point A appliqué au vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$.

$\left[\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}\right] dm = \vec{J}_A(S, \Omega(S/R)) = [I_A(S)]\vec{\Omega}(S/R)$

Par conséquent l'expression du moment cinétique devient :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_A(S/R) + I_A(S/R).\vec{\Omega}(S/R)}$$

iii. Cas particulier :

- Si A est fixe dans R

Alors $\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R) = I_A(S/R).\vec{\Omega}(S/R)}$

- Si A est confondu avec G

Alors $\boxed{\vec{\sigma}_G(S/R) = I_G(S/R).\vec{\Omega}(S/R)}$

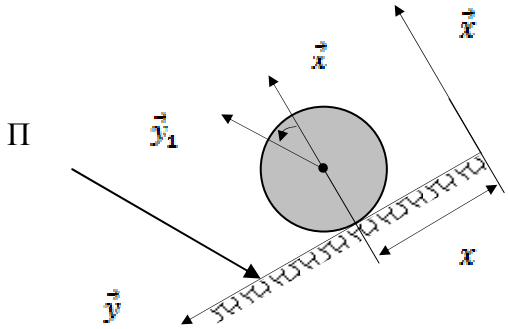
Remarque :

Si on suppose la masse de l'ensemble matériel (E) concentrée en son centre d'inertie G, le torseur cinétique s'écrit au point G :

$$\{C(E/R)\} = {}_{G}\begin{Bmatrix} m\vec{V}(G/R) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cette hypothèse simplificatrice est acceptable ou non suivant la nature de mouvement de (E). Par exemple, une bille dont on étudie le mouvement de chute libre sera modélisée par un point matériel, ce qui est exclu pour l'étude de son roulement sans glissement sur un plan incliné.

3. Application :



Considérons un cylindre de révolution (S) roulant sans glisser sur un plan incliné, en considérant que l'axe de cylindre reste constamment orthogonal à la ligne de plus grande pente du plan, de façon à schématiser cette étude par un problème plan.

Soit $R\,(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au plan (Π), l'axe $(O,\vec{y})$ étant dirigé suivant la ligne de plus grande pente.

Le cylindre de révolution (S), homogène de masse m , de rayon R et de centre d'inertie G, à pour axe de révolution $(G,\vec{z})$.

(S) est en contact avec le plan (Π) suivant l'axe $(I,\vec{x})$ et roule sans glisser sur ce plan.

$R_1\,(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ est un repère lié à (S). On pose $\theta = (\vec{x},\vec{x}_1)$

La matrice d'inertie du cylindre (S) en son centre d'inertie G est :

$$I_{(O,S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec $C = m\dfrac{R^2}{2}$; $A = m\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{h^2}{12}\right)$ et $\vec{\Omega}(S/R)=\dot{\theta}\vec{z}$

Déterminer le moment cinétique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R

Appliquons $\vec{\sigma}_G(S/R)=I_{G(S/R)}\cdot\vec{\Omega}(S/R)$

On obtient :

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = C\dot{\theta}\,\vec{z}$$

D'où $\vec{\sigma}_G(S/R) = \frac{1}{2}\, m\, R^2 \dot{\theta}\vec{z}$

4. *Changement de point d'un moment d'un torseur cinétique :*

On sait que $\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\, dm$

De même $\vec{\sigma}_B(S/R) = \int \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$

Intercalant A $\vec{\sigma}_B(S/R) = \int \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\right) \wedge \vec{V}(P/R) dm = \int \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}(P/R) dm + \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$

$$= \overrightarrow{BA} \wedge \int \vec{V}(P/R) dm + \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

D'où

$$\boxed{\vec{\sigma}_B(S/R) = \vec{\sigma}_A(S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{V}(G/R)}$$

4.1 Application :

Reprenons l'application précédente : Déterminer le moment cinétique au point I du solide (S)

$$\vec{\sigma}_I(S/R) = \vec{\sigma}_G(S/R) + \overrightarrow{IG} \wedge m\overrightarrow{V_G}(S/R)$$

$$\vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}\vec{z} + R\vec{x} \wedge m\vec{V}(G/R)$$

Finalement $\boxed{\vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{3}{2} mR^2 \dot{\theta}\vec{z}}$

II. ENERGIE CINETIQUE :

Par définition, l'énergie cinétique d'un solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est :

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\int_{P\in S} \left[\vec{V}(P/R)\right]^2 dm$$

Si le point A est lié au solide (S), il existe entre les vecteurs vitesses $\vec{V}(P/R)$ et $\vec{V}(A/R)$ la relation :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}$$

Remarque :

- Pour bien préciser que le point A est lié au solide (S) nous noterons le vecteur vitesse du point A par rapport au repère R : $\vec{V}(A \in S/R)$.

- Par commodité nous calculerons le double de l'énergie cinétique.

Mettons le double de l'énergie cinétique sous la forme :

$$2\,T(S/R) = \int_{P\in S} \vec{V}(P/R).\vec{V}(P/R)\,dm$$

Et remplaçons le premier vecteur $\vec{V}(P/R)$ par son expression en fonction de $\vec{V}(A \in S/R)$:

$$2\,T(S/R) = \int_{P\in S} [\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}].\vec{V}(P/R)\,dm$$

Soit $2\,T(S/R) = \int_{P\in S} \vec{V}(A \in S/R).\vec{V}(P/R)\,dm + \int_{P\in S} [\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}].\vec{V}(P/R)\,dm$

La première intégrale s'écrit

$$\vec{V}(A \in S/R).\int_{P\in S} \vec{V}(P/R)\,dm$$

La deuxième intégrale s'écrit en inversant au préalable les signes scalaires et vectoriel du produit mixte situé sous le signe somme :

$$\vec{\Omega}(S/R).\int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm$$

Par suite :

$$2\,T(S/R) = \vec{V}(A \in S/R).\int_{P\in S} \vec{V}(P/R)\,dm + \vec{\Omega}(S/R).\int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm$$

Dans cette expression apparaissent les deux éléments de réduction au point A du torseur cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R, ainsi que les deux éléments de réduction au point A du torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R. On peut alors écrire l'énergie cinétique sous la forme :

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}\,{}_G\{T_C(S/R)\} \otimes_G \{C(S/R)\}$$

$$= \frac{1}{2}\,{}_G\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(G \in S/R) \end{Bmatrix} \otimes_G \begin{Bmatrix} m.\vec{V}(G \in S/R) \\ \vec{\sigma}(G,S/R) \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}(G,S/R) + \frac{1}{2}m.[\vec{V}(G \in S/R)]^2$$

On obtient finalement :

$$\boxed{E_C(S/R) = \frac{1}{2}m[\vec{V}(G \in S/R)]^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R).I(G,S)\vec{\Omega}(S)R)}$$

Cas particuliers :

- Mouvement d'un solide autour d'un point fixe A du repère R

$$\vec{V}(A \in S/R) = \vec{O}$$

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}{}_A\{T_C(S/R)\} \otimes_A \{C(S/R)\}$$

$$= \frac{1}{2}{}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{O} \end{Bmatrix} \otimes {}_A\begin{Bmatrix} m\vec{V}(G \in S/R) \\ I(A,S)\vec{\Omega}(S/R) \end{Bmatrix}$$

Ainsi pour A lié à S et fixe dans R, on a :

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}.\vec{\Omega}(S/R).I(A,S)\vec{\Omega}(S/R)$$

Ou encore :

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}(A,S/R)$$

- Mouvement d'un solide S autour d'un axe fixe (A, $\vec{x}$) du repère R.

En posant :

* $\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\theta}\vec{x}$

* $I_{Ax}(S)$ = moment d'inertie de S par rapport à l'axe (A, $\vec{x}$) ;

Alors : $E_C(S/R) = \frac{1}{2}I_{Ax}(S).\omega^2$

- Mouvement de translation de S dans R => $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{O}$ d'où

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}m.[\vec{V}(G \in S/R)]^2$$

Application :

Complétons l'application précédente (cylindre de révolution sur un plan incliné) par la question suivante :

Déterminer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R.

(S) roulant sans glisser sur (Π) : $\vec{V}(I \in S/R) = \vec{0}$, par la suite :

$$2T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}_1(S/R)$$

Soit avec

$$\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\theta}\vec{z} \; et \vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}\vec{z}$$

D'où

$$\boxed{2T(S/R) = \frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}^2}$$