PLAN DE LECON

DYNAMIQUE

❖ **Objectifs spécifiques :**

A la fin de la séance l'étudiant doit être capable de :

- Déterminer le torseur Dynamique d'un solide en mouvement par rapport à un repère.
- Appliquer le principe fondamentale de la dynamique
- Déterminer l'équation de mouvement d'un système

❖ **Pré requis :**

L'étudiant est supposé connaître :

- Cinématique.
- Caractéristiques d'inertie d'un solide.

❖ **Auditeurs :**

Etudiants des I.S.E.T.

Profil : Génie Mécanique.

Option : Tronc commun.

Niveau : L1/S2.

❖ **Durée :** 6 séances de 1^h : 30

❖ **Evaluation :** - Formative au cours de la séance et TD N°7

- Sommative : Test d'évaluation.

❖ **Matériels didactiques et méthodologie :**

- Tableau
- Méthode interrogative
- Polycopiés
- Transparents

Chap.7: DYNAMIQUE

Le principe fondamental de la dynamique établit une relation entre le mouvement d'un ensemble matériel et les actions mécaniques qui lui sont appliquées. Il permet d'expliquer et de prévoir avec une excellente précision les phénomènes mécaniques « classiques ».
A la fin de ce chapitre l'étudiant doit être capable de déterminer les éléments de réduction du torseur dynamique d'un solide dans son mouvement en un point et savoir appliquer le principe fondamental de la dynamique.

I. TORSEUR DYNAMIQUE :

1. *Définitions :*

Le torseur dynamique (ou le torseur des quantités d'accélération) de l'ensemble matériel (E) de centre d'inertie (G) dans son mouvement par rapport au repère R, en un point A quelconque est le torseur suivant :

$$\{D(E/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P\in E} \vec{\Gamma}(P/R)dm \\ \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm \end{array} \right\}$$

- $\int_{P\in E} \vec{\Gamma}(P/R)dm$ est La ***résultante dynamique*** de E dans son mouvement par rapport à R

$$\boxed{\vec{R}_d(E/R) = \int_{P\in E} \vec{\Gamma}(P/R)dm}$$

- $\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm$ est le ***moment dynamique*** en A de E dans son mouvement par rapport à R.

$$\boxed{\vec{\delta}_A(E/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm}$$

Remarque:

L'accélération dépend du repère de référence choisi et donc le torseur dynamique dépend également du repère de référence choisi.

2. Expression du torseur dynamique d'un système :

On sait que : $m\,\vec{V}(G/R) = \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm$

Dérivons les deux membres : $m\left(\frac{d}{dt}\vec{V}(G/R)\right)_R = \int_{P\in E}\left(\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right)_R dm$

On obtient finalement $m\,\vec{\Gamma}(G/R) = \int_{P\in E}\vec{\Gamma}(P/R)\,dm$

Le torseur dynamique s'écrit donc

$$\boxed{\{D(E/R)\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_A(E/R) \end{Bmatrix}}$$

3. Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique :

Plutôt que de conduire un calcul direct du moment dynamique nécessitant la connaissance du champs des accélérations, il est souvent plus simple de déduire le moment dynamique du moment cinétique (le calcul des vitesses est toujours plus simple que celui des accélérations). C'est pourquoi nous allons mettre en évidence la relation qui unit ces deux moments.

Le moment cinétique, en un point A quelconque, de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R, est par définition :

$$\vec{\sigma}_A(E/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t, dans R, en utilisant la relation (1).

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R = \int_{P\in E}\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\right)\right]_R dm$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AP}\right]_R\wedge\vec{V}(P/R) + \overrightarrow{AP}\wedge\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_R$$

Et

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AP}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R - \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AP}\right]_R = \vec{V}(P/R) - \vec{V}(A/R)$$

Alors :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\right)\right]_R = -\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(P/R)+\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}(P/R)$$

Par conséquent :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R = -\int_{P\in E}\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(P/R)dm+\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}(P/R)dm$$

La première intégrale s'écrit :

$$-\vec{V}(A/R)\wedge\int_{P\in E}\vec{V}(P/R)dm$$

Soit

$$-\vec{V}(A/R)\wedge m\vec{V}(G/R)$$

La deuxième intégrale représente le moment dynamique $\vec{\delta}_A(E/R)$

En définitive, on obtient la relation suivante :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R + m\,\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(G/R)}$$

Remarque :

Cette relation est valable pour un point A et un ensemble matériel (E) quelconques. Par conséquent le vecteur vitesse $\vec{V}(A/R)$ est uniquement égal à $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R$

Cas particulier :

Distinguons deux cas particuliers ou le produit vectoriel de la relation précédente est nul.

- **Premier cas :** A est fixe dans R, alors :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R}$$

- **Deuxième cas :** A est confondu avec G, alors

$$\boxed{\vec{\delta}_G(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_G(E/R)\right]_R}$$

- **Troisième cas :** Si $\vec{V}(A/R)$ est parallèle à $\vec{V}(G/R)$ alors :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R}$$

4. Changement de point d'un moment d'un torseur dynamique :

$$\vec{\delta}_B(E/R) = \int \overrightarrow{BP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm = \int \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\right) \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm$$

$$= \int \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm + \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm$$

$$= \overrightarrow{BA} \wedge \int \vec{\Gamma}(P/R)dm + \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm$$

Donc le torseur dynamique obéit aux mêmes règles que les autres torseurs :

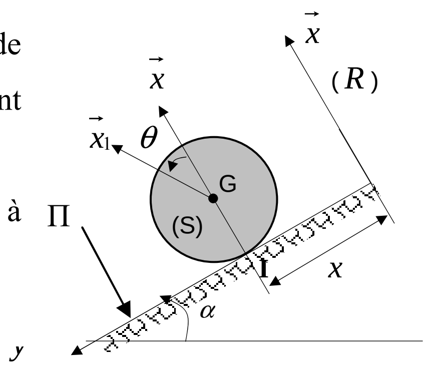
quelques soient les points A et B.

$$\boxed{\vec{\delta}_B(E/R) = \vec{\delta}_A(E/R) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{\Gamma}(G/R)}$$

5. Application : Disque roulant sur un plan incliné :

Déterminer le moment dynamique au point I (point de contact) du cylindre plein (S) de rayon R dans sont mouvement par rapport à repère R.

On sait que le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe $(G,\vec{z})$ est $I_{GZ(S/R)} = \frac{1}{2}m\,R^2$



Réponse :

Deux méthodes sont possibles : on peut passer du point G au point I au niveau du moment cinétique ou au niveau du moment dynamique

1ère méthode :

On sait que $\vec{\sigma}_G(P/R) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\vec{z}$ Déjà déterminer au paravent

Les moments cinétiques $\vec{\sigma}_I(S/R)$ et $\vec{\sigma}_G(S/R)$ sont liés par la relation suivante :

$$\vec{\sigma}_I(S/R) = \vec{\sigma}_G(S/R) + \overrightarrow{IG} \wedge m\vec{V}(G/R)$$

$\vec{V}(G/R) = \vec{V}(I \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{IG}$ Et puisque $\vec{V}(I \in S/R) = \vec{0}$ (Condition de roulement sans glissement au point I)

$$\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{IG} = \dot{\theta}\vec{z} \wedge R\vec{x} = \dot{\theta}R\vec{y}$$

$$\overrightarrow{IG} \wedge m\vec{V}(G/R) = R\vec{x} \wedge mR\dot{\theta}\vec{y} = mR^2\dot{\theta}\vec{z}$$

$$\vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\vec{z} + R^2\dot{\theta}\vec{z} = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\vec{z}$$

Le moment dynamique $\vec{\delta}_I(S/R)$ s'obtient à partir du moment cinétique $\vec{\sigma}_I(S/R)$ par la relation suivante :

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_I(S/R)\right)_R + m\,\vec{V}(I/R)\wedge\vec{V}(G/R)$$

Comme cela a été signalé au paravent, le vecteur vitesse $\vec{V}(I/R)$ est uniquement égal à

$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OI}\right]_R$. C'est donc le point géométrique de contact entre (S) et (2) qu'il faut considérer dans le calcule, point qui n'appartient ni à (S) ni à (Π).

Les point I et G ayant même vecteur vitesse par rapport au repère R (l'axe $(I,\vec{z})$ a un mouvement de translation par rapport à R) le produit vectoriel $\vec{V}(I/R)\wedge\vec{V}(G/R)$ est nul. Alors

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_I(S/R)\right)_R \quad \text{Finalement} \quad \vec{\delta}_I(S/R) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\,\vec{z}$$

2^ème^ méthode :

Le moment dynamique $\vec{\delta}_G(S/R)$ s'obtient à partir du moment cinétique $\vec{\sigma}_G(S/R)$ par la relation suivante :

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_G(S/R)\right)_R = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}\,\vec{z}$$

Les moments dynamiques $\vec{\delta}_I(S/R)$ et $\vec{\delta}_G(S/R)$ sont liés par la relation :

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \vec{\delta}_G(S/R) + \overrightarrow{IG}\wedge m\vec{\Gamma}(G/R)$$

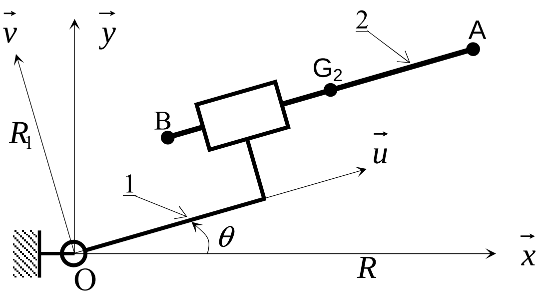
Sachant que $\vec{\Gamma}(G/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(G/R)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}R\dot{\theta}\vec{y}\right]_R = R\ddot{\theta}\vec{y}$. Soit :

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}\,\vec{z} + R\vec{x}\wedge mR\ddot{\theta}\,\vec{y} = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\,\vec{z}$$

Finalement $\vec{\delta}_I(S/R) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\,\vec{z}$

6. Exercice 1 :

Une pièce coudée (1) est en liaison pivot par rapport au bati (0), et une tige (2) est en liaison glissière avec (1) comme l'indique la figure ci-contre. Le mécanisme est plan. Les paramètres du mouvement $\theta = (\vec{x}, \vec{u})$ et $\lambda = \overrightarrow{OG_2} \cdot \vec{u}$.



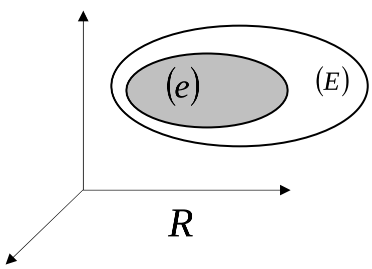
On demande de :

1. Calculer $\vec{\sigma}_{G_2}(2/R)$
2. Calculer $\vec{\delta}_{G_2}(2/R)$
3. Donner l'équation de $\vec{\Gamma}_{G_2}(2/R)$
4. Calculer $\vec{\delta}_O(2/R)$

II. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE :

1. Enoncé :

Il existe au moins un repère R , appelé repère galiléen, et au moins une chronologie galiléenne, tels que pour tout sous-ensemble matériel (e) d'un ensemble matériel (E), le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport au repère R soit égale au torseur des actions mécaniques extérieures à (e).



Notons $(\bar{e})$ l'extérieur de (e).

Le principe fondamental de la dynamique : (PFD)

$$\boxed{\{D(e/R)\} = \{\tau(\bar{e} \to e)\} \; \forall (e) \subset (E)}$$

2. Théorèmes généraux de la dynamique :

En exprimant que les deux torseurs intervenant dans le principe fondamental ont même résultante générale et même moment résultant en tout point, on obtient deux théorèmes appelés théorèmes généraux de la dynamique.

Soient m la masse et G le centre d'inertie du sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en mouvement par rapport au repère R . Posons, en un point A quelconque :

$$\{D(e/R)\}_A = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_A(e/R) \end{Bmatrix}_A$$

et

$$\{\tau(\bar{e} \rightarrow e)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{e} \rightarrow e) \\ \vec{M}_A(\bar{e} \rightarrow e) \end{Bmatrix}_A$$

2.1 Théorème de la résultante dynamique :

Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en mouvement par rapport au repère galiléen R, la résultante dynamique de (e) dans son mouvement par rapport au repère R est égale à la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e).

Soit

$$\boxed{m\vec{\Gamma}(G/R) = \vec{R}(\bar{e} \rightarrow e)}$$

2.2 Théorème du moment dynamique :

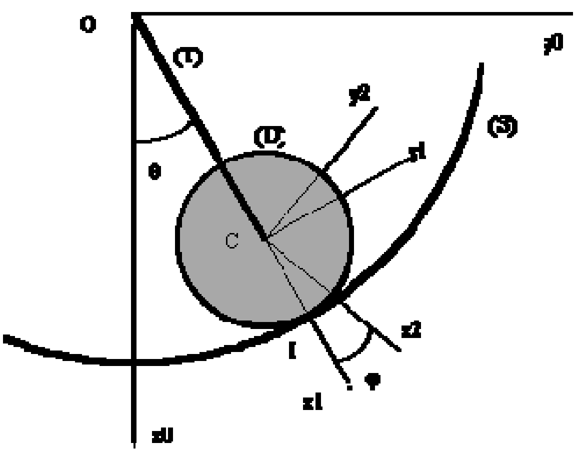
Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en mouvement par rapport au repère galiléen R, le moment dynamique de (e) dans son mouvement par rapport au repère R est égale au moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e).

Soit

$$\boxed{\vec{\delta}_A(e/R) = \vec{M}_A(\bar{e} \rightarrow e) \forall A}$$

III. EXERCICE D'APPLICATION :

On considère un système constitué d'une tige (T) de masse m de longueur L et d'un disque (D) de centre C de masse $9 \times m$ de rayon $L/3$. La tige est articulée au point O par une liaison pivot d'axe $\left(O,\vec{z}\right)$ et est liée au disque par une liaison pivot en C d'axe $\left(C,\vec{z}\right)$. Le disque est en contact permanent au point I avec un solide (S) immobile.



On repère les mouvements du système par les paramètres suivants :

$R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}\right)$ le repère de référence lié à (S),

$R_1\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}\right)$ un repère mobile lié à (T),

$R_2\left(C,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}\right)$ un repère mobile lié au disque (D),

tel que $\theta=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$ et $\varphi=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$.

On supposera qu'il y a ***roulement sans glissement*** en I .

I- ETUDE DE LA TIGE

Soit G le centre de gravité de la tige (T).

1) Calculez la vitesse de G

2) Donnez la matrice d'inertie de la tige (T) au point G dans b_1 .

3) Calculez le torseur cinétique de la tige au point G .

4) Calculez le torseur dynamique de la tige au point C .

5) Calculez l'énergie cinétique de la tige (T).

6) Calculez l'énergie potentielle de la tige (T).

7) Ecrire les équations découlant du $P.F.D$ pour la tige (T).

II- ETUDE DU DISQUE

8) Donnez la matrice d'inertie du disque (D) au point C dans b_2 .

9) Calculez le torseur cinétique du disque (D) au point C .

10) Calculez l'énergie cinétique du disque (D).

11) Calculez l'énergie potentielle du disque (D).

12) Calculez le torseur dynamique du disque (D) au point C .

13) Ecrire les équations découlant du $P.F.D$ pour le disque (D).

14) Donner l'équation de roulement sans glissement de (D) sur (S).

Correction :

I- Etude de la tige

1) Calculer la vitesse de G

$$\vec{V}\left(G\in\frac{T}{R_0}\right)=\vec{V}\left(O\in\frac{T}{R_0}\right)+\vec{\Omega}(T/R_0)\wedge\overrightarrow{OG}$$

$$=\vec{0}+\dot{\theta}\vec{z}\wedge\frac{L}{2}\overrightarrow{x_1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{V}(G\in(T/R_0)=\frac{L}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{y_1}}$$

2)

$$[I_G(T)]_{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}_{b1}$$

3) Calcul du torseur cinétique de la tige (T) au point G dans b1

on a $\quad \{C(T/R_0)\}_G = \begin{Bmatrix} m\overrightarrow{V_G}(T/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma_G}(T/R_0) \end{Bmatrix}_G$

on a $\quad \boxed{m\overrightarrow{V_G}(T/R_0) = m\frac{L}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{y_1}}$

$$\overrightarrow{\sigma_G}(T/R_0) = \vec{J}G(T,\vec{\Omega}((T/R_0)) = [I_G(T)]_{B1}.(\vec{\Omega}(T(T/R_0))_{B1}$$

$$\overrightarrow{\sigma_G}(T/R_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}_{B1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{B1}$$

d'ou $\quad \overrightarrow{\sigma_G}(T/R_0) = \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\vec{z}$

d'ou $\quad \{C(T/R_0)\}_G^{b1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ m\frac{L}{2}\dot{\theta} & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12}\dot{\theta} \end{Bmatrix}_G^{b1}$

4) $\{D(T/R_0)\}_c = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \overrightarrow{\delta_c}(T/R_0) \end{Bmatrix}_C$

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_G}(T/R_0)\right]_{R_0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{y_1}\right)\right]_{R_0}$$

$$= \frac{L}{2}\ddot{\theta}\overrightarrow{y_1} + \frac{L}{2}\dot{\theta}(-\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}) = -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\overrightarrow{y_1}$$

on a $\quad \overrightarrow{\delta_G}(T/R_0) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_G}(T/R_0)\right)_{R_0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\delta_G}(T/R_O) = \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta}\vec{z}$$

$$\overrightarrow{\delta_C}(T/R_O) = \overrightarrow{\delta_G}(T/R_O) + m\vec{\Gamma}(G/R_O) \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$= \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta}\vec{z} + m\left(-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\overrightarrow{y_1}\right) \wedge \frac{L}{2}\overrightarrow{x_1}$$

$$d'ou \quad \overrightarrow{\delta_C}(T/R_O) = \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta}\vec{z} - \frac{mL^2}{4}\ddot{\theta}\vec{z}$$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{\delta_C}(T/R_O) = -\frac{mL^2}{6}\ddot{\theta}\vec{z}}$

$$\Rightarrow \{D(T/R_O)\}_C^{R_1} = \begin{Bmatrix} -\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2 & 0 \\ \frac{mL}{2}\ddot{\theta} & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{6}\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

5) Calcul de l'énergie cinétique de la tige (T)

$$on\ a\ 2Ec(T/R_O) = \{C(T/R_O)\}_G \ . \ \{v(T/R_O)\}_G$$

$$\rightarrow 2Ec(T/R_O) = \begin{Bmatrix} m\overrightarrow{V_G}(T/R_O) \\ \overrightarrow{\sigma_G}(T/R_O) \end{Bmatrix}_G . \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(T/R_O) \\ \overrightarrow{v_G}(T/R_O) \end{Bmatrix}_G$$

$$2Ec(T/R_O) = m\overrightarrow{V_G}^2(T/R_O) + \vec{\Omega}(T/R_O)$$

$$= m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{y_1}\right)^2 + \dot{\theta}\vec{z} \ . \ \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\vec{z}$$

$$d'ou \quad 2Ec(T/R_O) = \frac{mL^2}{8}\dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{24}\dot{\theta}^2 = \frac{4mL^2}{24}\dot{\theta}^2$$

6) Calcul de l'énergie potentielle de la tige (T) on prendra comme origine des énergies potentielles celle pour laquelle la tige est verticale

$$Ep(T) = mg\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\theta\right)$$

D'où l'énergie potentielle de la pesanteur de la tige (T) est :

$$\boxed{Ep(T) = \frac{mg}{2}(L - L\cos\theta)}$$

7) PFD $\{D(T/R_O)\}_C^{R_1} = \left\{\tau_s(\overrightarrow{F_{ext}} \rightarrow T)\right\}_C^{R_0}$

- Isolons la tige (Γ)

a) Bilan des actions mécaniques appliqués sur la tige

1- Le poids de (Γ) : $\overrightarrow{P_1} = mg\overrightarrow{x_0}$

2- L'action mécanique due à (0) →(T) au point o

3- L'action mécanique due à (D) →(T) au point c

- Les torseurs associés aux actions mécaniques en leurs points d'application :

$$\{\tau_s(\overrightarrow{P_1} \rightarrow T)\}_G^{R_0} = \begin{Bmatrix} mg & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G^{R_0}$$

$$\{\tau_s(O \rightarrow T)\}_\theta^{R_0} = \begin{Bmatrix} X_{OT} & L_{OT} \\ Y_{OT} & M_{OT} \\ Z_{OT} & 0 \end{Bmatrix}_\theta^{R_0}$$

$$\{\tau_s(D \rightarrow T)\}_C^{R_0} = \begin{Bmatrix} X_{DT} & L_{DT} \\ Y_{DT} & M_{DT} \\ Z_{DT} & 0 \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

- Transfert des torseurs statiques au point C

$$1 - \{\tau_s(\overrightarrow{P_1} \rightarrow T)\}_{G \rightarrow C}$$

$$\vec{M}_C(\vec{P_1}) = \vec{M}_G(\vec{P_1}) + \overrightarrow{CG} \wedge \vec{P_1}$$

$$= \vec{0} + (-\frac{L}{2}\overrightarrow{x_1}) \wedge mg\overrightarrow{x_0}$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_0}) \wedge mg\overrightarrow{x_0}$$

$$= \frac{L}{2}mg\sin\theta\,\vec{z}$$

$$d'ou\ \{\tau_s(\overrightarrow{P_1} \rightarrow T)\}_C^{R_0} = \begin{Bmatrix} mg & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2}\sin\theta \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

$$2 - \{\tau_s(O \rightarrow T)\}_{\theta \rightarrow C}^{R_0}$$

$$on\,a\ \vec{M}_C(\vec{R}_{OT}) = \vec{M}_o(\vec{R}_{OT}) + \overrightarrow{CO} \wedge \vec{R}_{OT}$$

$$= \begin{pmatrix} L_{OT} \\ M_{OT} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -L\cos\theta \\ -L\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_{OT} \\ Y_{OT} \\ Z_{OT} \end{pmatrix}$$

$$d'ou\ \vec{M}_C(\vec{R}_{OT}) = \begin{vmatrix} -LZ_{OT}\sin\theta + L_{OT} \\ M_{OT} + LZ_{OT}\cos\theta \\ -LY_{OT}\cos\theta + LX_{OT}\sin\theta \end{vmatrix}$$

$d'ou\ \{\tau_s(O \to T)\}_C^{R_0}$

- Le torseur statique $(\bar{T} \to T)$ au point C et dans la bare b_0

$$\{\tau_s(\bar{T} \to T)\}_C^{R_0} = \{\tau_s(\vec{F_1} \to T)\}_C^{R_0} + \{\tau_s(O \to T)\}_C^{R_0} + \{\tau_s(D \to T)\}_C^{R_0}$$

$$= \begin{Bmatrix} mg & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2}mg\sin\theta \end{Bmatrix}_C^{R_0} + \begin{Bmatrix} X_{OT} & L_{OT} - LZ_{OT}\sin\theta \\ Y_{OT} & M_{OT} + LZ_{OT}\cos\theta \\ Z_{OT} & LX_{OT}\sin\theta - LY_{OT}\cos\theta \end{Bmatrix}_C^{R_0} + \begin{Bmatrix} X_{DT} & L_{DT} \\ Y_{DT} & M_{DT} \\ Z_{DT} & 0 \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

$$d'ou\ \{\tau_s(\bar{T} \to T)\}_C^{R_0} = \begin{Bmatrix} mg + X_{OT} + X_{DT} & L_{OT} - LZ_{OT}\sin\theta + L_{DT} \\ Y_{OT} + Y_{DT} & M_{OT} + LZ_{OT}\cos\theta + M_{DT} \\ Z_{OT} + Z_{DT} & LX_{OT}\sin\theta - LY_{OT}\cos\theta \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

Appliquons maintenant le PFD à $(T)/R_0$

$$\{D(T/R_O)\}_C^{R_0} = \{\tau_s(\bar{T} \to T)\}_C^{R_0}$$

$$avec\ \{D(T/R_O)\}_C^{R_0} = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{mL}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\right) & 0 \\ \frac{mL}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta & 0 \\ 0 & -\frac{mL}{6}\ddot{\theta} \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

$$PDF \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{R}(\overrightarrow{F_{ext}} \to T) = m\vec{\Gamma}(C/R_0) \\ \vec{M}(\overrightarrow{F_{ext}} \to T) = \vec{\delta}_C(D/R_0) \end{Bmatrix}$$

$\{\tau_s(\bar{T} \to T)\}_C$ projeté sur $R_0 = \{D(T/R_0)\}_C$ projeté sur R_0				
$\vec{R}(\bar{T} \to T).\vec{x_0}$	$mg + X_{OT} + X_{DT}$	=	$-(\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2 \cos\theta + \frac{mL}{2}\ddot{\theta} \sin\theta)$	$m\vec{\Gamma}(G/R_0)\vec{x_0}$
$\vec{R}(\bar{T} \to T).\vec{y_0}$	$Y_{OT} + Y_{DT}$	=	$\frac{mL}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{mL}{2}\dot{\theta}^2 \sin\theta$	$m\vec{\Gamma}(G/R_0)\vec{y_0}$
$\vec{R}(\bar{T} \to T).\vec{z_0}$	$Z_{OT} + Z_{DT}$	=	0	$m\vec{\Gamma}(G/R_0)\vec{z_0}$
$\vec{M}_c(\bar{\ } \to).\vec{x_0}$	$L_{OT} - LZ_{OT}\sin\theta + LD_T$	=	0	$\vec{\delta}_c(T/R_0).\vec{x_0}$
$\vec{M}_c(\bar{T} \to T).\vec{y_0}$	$M_{OT} + LZ_{OT}\cos\theta + M_{DT}$	=	0	$\vec{\delta}_c(T/R_0).\vec{y_0}$
$\vec{M}_c(\bar{T} \to T).\vec{z_0}$	$LX_{OT}\sin\theta - LY_{OT}\cos\theta$	=	$-\frac{mL}{6}\ddot{\theta}$	$\vec{\delta}_c(T/R_0).\vec{z_0}$

II- Etude du Disque

8-

$$[I_c(D)]_{b_2} = \begin{bmatrix} \frac{9m}{4}\left(\frac{L}{3}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9m}{4}\left(\frac{L}{3}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9m}{2}\left(\frac{L}{3}\right)^2 \end{bmatrix}_{b_2}$$

$$d'ou \quad [I_c(D)]_{b_2} = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{2} \end{bmatrix}_{b_2}$$

9-

$$\{C(D/R_0)\}_c = \begin{Bmatrix} 9m\vec{V}_G(D/R_0) \\ \vec{\sigma}_c(D/R_0) \end{Bmatrix}_G$$

$$\vec{\vartheta}_c(D/R_0) = \vec{\vartheta}_c(T/R_0) = \vec{V}_c(o \in T/R_0) + \vec{\Omega}(T/R_0) \wedge \vec{OC}$$

$$= \vec{o} + \dot{\theta}\vec{z_0} \wedge L\vec{x_1} = L\dot{\theta}\vec{z_1}$$

$$\vec{\sigma}_c(D/R_0) = \vec{J_c}(D, \vec{\Omega}(2/0)) = [I_c(D)]_{b_1} . (\vec{\Omega}(D/R_0))_{b_2}$$

$d'ou\ \vec{\sigma}_c(D/R_0) = \dfrac{mL^2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\overrightarrow{z_0}$

$$d'ou\{C(D/R_0)\}_c^{R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 9mL\dot{\theta} & 0 \\ 0 & \dfrac{mL^2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi}) \end{Bmatrix}_c^{R_1}$$

10- calcul de l'énergie cinétique du disque (D)

$$2Ec(D/R_0) = \begin{Bmatrix} 9m\vec{\vartheta}_c(D/R_0) \\ \vec{\sigma}_c(D/R_0) \end{Bmatrix}_c^{R_1} . \begin{Bmatrix} (\vec{\Omega}(D/R_0) \\ \vec{\vartheta}_c(D/R_0) \end{Bmatrix}_c^{R_1}$$

$$\Rightarrow 2Ec(D/R_0) = 9m\vec{\vartheta}_c(D/R_0) + (\vec{\Omega}(D/R_0).\vec{\sigma}_c(D/R_0)$$

$$= 9m(L\dot{\theta}\overrightarrow{y_1})^2 + (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\overrightarrow{z_0}\ .\ \frac{mL^2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\overrightarrow{z_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2Ec(D/R_0) = \frac{9}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mL^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2}$$

11- calcul de l'énergie potentielle du disque (on prendra comme origine des énergies potentielles celle pour laquelle la tige est verticale)

$Ep(D) = 9mg(L - L\cos\theta) = 9mgL(1-\cos\theta)$

12- $\{D(D/R_0)\}_c = \begin{Bmatrix} 9m\vec{\Gamma}(C/R_0) \\ \vec{\delta}_c(D/R_0) \end{Bmatrix}_c$

$$on\ a\ \vec{\Gamma}(C/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_c}(D/R_0)\right]_{R_0}$$

$$= \left[\frac{d}{dt}(L\dot{\theta}\overrightarrow{y_1})\right]_{R_0} = L\ddot{\theta}\overrightarrow{y_1} + L\dot{\theta}(-\dot{\theta}\overrightarrow{x_1})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\Gamma}(C/R_0) = L\ddot{\theta}\overrightarrow{y_1} - L\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1}$$

$$d'ou \quad \vec{\Gamma}(C/R_0) = L\ddot{\theta}(\cos\theta\,\overrightarrow{y_0} - \sin\overrightarrow{x_0}) - L\dot{\theta}^2(\cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_0})$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\Gamma}(C/R_0) = [-L\ddot{\theta}\sin\theta - L\dot{\theta}^2\cos\theta]\overrightarrow{x_0} + (L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta)\overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{\delta_C}(D/R_0) = (\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_c(D/R_0))_{R_0}$$

$$= (\frac{d}{dt}(\frac{3mL^2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\overrightarrow{z_0})_{R_0}$$

$$= \frac{3mL^2}{2}(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})\overrightarrow{z_0}$$

$$d'ou\ \{D(D/R_0)\}_C^{R_0} = \begin{Bmatrix} -9m(L\ddot{\theta}\sin\theta - L\dot{\theta}^2\cos\theta) & 0 \\ 9m(L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta) & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{2}(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

13- PFD $\{D(D/R_0)\}_C^{R_0} = \{\tau_s(\overrightarrow{F_{ext}} \rightarrow D)\}_C^{R_0}$

- Isolons le disque (D)

a) Bilan des actions mécaniques appliquées sur le disque (D)

1- Le poids de (D) : $\overrightarrow{F_2} = 9mg\overrightarrow{x_0}$

2- L'action mécanique due à (T)⟶(D) au point C

3- L'action mécanique due à (S)⟶(D) au point I

- Les torseurs associés aux actions mécaniques en leurs points d'application

1- $\{\tau_s(\overrightarrow{F_2} \rightarrow D)\}_C^{R_0} = \begin{Bmatrix} 9mg & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{R_0}$

2- $\{\tau_s(T \rightarrow D)\}_C^{R_0} = \{\tau_s(D \rightarrow T)\}_C^{R_0} = \begin{Bmatrix} -X_{DT} & -L_{DT} \\ -Y_{DT} & -M_{DT} \\ -Z_{DT} & 0 \end{Bmatrix}_C^{R_0}$

3- $\{\tau_s(S \rightarrow D)\}_I^{R_0} = \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_I^{R_0}$

$\{\tau_s(S \rightarrow D)\}_I^{R_1} = \begin{Bmatrix} -N_I & 0 \\ T_I & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_I^{R_1}$

$\vec{R_I} = -N_1(\cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_0}) + T_1(-\sin\theta\,\overrightarrow{x_0} + \cos\theta\,\overrightarrow{y_0})$

Transfert des torseurs statiques au points C

$\{\tau_s(S \rightarrow D)\}_{I \rightarrow C}^{R_0}$

$on\ a\ \vec{M}_C(\vec{R}) = \vec{M}_I(\vec{R}) + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{R}$

$$\vec{M}_C(\vec{R}) = \vec{o} + \begin{pmatrix} \frac{L}{3}\cos\theta \\ \frac{L}{3}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{3}\cos\theta\, R_y - \frac{L}{3}\sin\theta R_x \end{pmatrix}$$

$$d'ou\ \{\tau_s(S \rightarrow D)\}_C^{R_0} = \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & \frac{L}{3}\cos\theta\, R_y - \frac{L}{3}\sin\theta R_x \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

Le torseur statique $(\bar{D} \longrightarrow D)$ au point C dans la base b_0

$$\{\tau_s(\bar{D} \longrightarrow D)\}_C^{R_0} = \{\tau_s(\vec{P_2} \longrightarrow D)\}_C^{R_0} + \{\tau_s(T \longrightarrow D)\}_C^{R_0} + \{\tau_s(S \longrightarrow D)\}_C^{R_0}$$

$$= \begin{Bmatrix} 9mg & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{R_0} + \begin{Bmatrix} -X_{DT} & -L_{DT} \\ -Y_{DT} & -M_{DT} \\ -Z_{DT} & 0 \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

$$+ \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & \frac{L}{3}\cos\theta\, R_y - \frac{L}{3}\sin\theta R_x \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

$$d'ou\ \{\tau_s(\bar{D} \longrightarrow D)\}_C^{R_0} = \begin{Bmatrix} 9mg + R_x - X_{DT} & -L_{DT} \\ R_y - Y_{DT} & -M_{DT} \\ -Z_{DT} & -\frac{L}{3}\cos\theta\, R_y - \frac{L}{3}\sin\theta R_x \end{Bmatrix}_C^{R_0}$$

$\{\tau_s(\bar{D} \longrightarrow D)\}_C^{R_0}$ $projeté\ sur\ R_0 = \{D(D/R_0)\}_C^{R_0}$ projeté dans R_0

D'où on obtient le système d'équation suivant

$$\begin{cases} 9mg + R_x - X_{DT} = -9m(L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta) & (1) \\ R_y - Y_{DT} = 9m(L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta) & (2) \\ -Z_{DT} = 0 & (3) \\ -L_{DT} = 0 & (4) \\ -M_{DT} = 0 & (5) \\ -\frac{L}{3}\cos\theta\, R_y - \frac{L}{3}\sin\theta R_x = \frac{3mL^2}{2}(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) & (6) \end{cases}$$

14- L'équation de roulement sans glissement de (D) sur (S) :

$\vec{\vartheta}(I \in D/S) = 0 \Longrightarrow \vec{\vartheta}(I \in D/R_0) - \vec{\vartheta}(I \in S/R_0) = \vec{o}$

$on\ a\ \vec{\vartheta}(I \in D/R_0) = \vec{\vartheta}(C \in D/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{CI}$

$\Longrightarrow\ \vec{\vartheta}(I \in D/R_0) = L\dot{\theta}\overrightarrow{y_1} + (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\overrightarrow{z_0} \wedge (\frac{L}{3}\overrightarrow{x_1})$

$d'ou\ \ \vec{\vartheta}(I \in D/R_0) = L\dot{\theta}\overrightarrow{y_1} + \frac{L}{3}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\overrightarrow{y_1}$

$$= (L\dot{\theta} + \frac{L}{3}(\dot{\theta} + \dot{\varphi}))\overrightarrow{y_1}$$

$\vec{\vartheta}(I \in S/R_0) = \vec{o}$

$d'ou\ \vec{\vartheta}(I \in D/S) = \vec{o} \Longrightarrow\ L\dot{\theta} + \frac{L}{3}(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) = 0$

$$\Longrightarrow \left(L + \frac{L}{3}\right)\dot{\theta} = -\frac{L}{3}\dot{\varphi}$$

$$\Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{4}$$