EXAMENS PROPOSES EN STATIQUE ET CINEMATIQUE DES SOLIDES

Institut Supérieur des Etudes Technologique de Nabeul
Département de Génie Mécanique

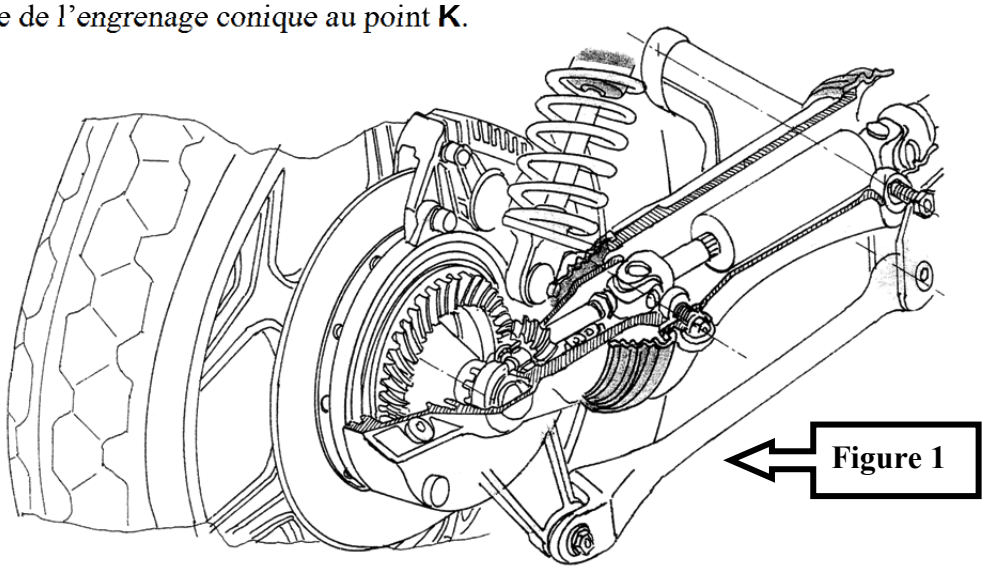
EXAMEN DE MECANIQUE GENERALE

Année universitaire : 2009/2010. Date : le /01/2010
Classe : GM 11, 12, 13, 14,15 et 16. Nombre de pages : 2
Durée : 1 heure 30 mn. Documents : non autorisés.
Proposé par : H.Amdouni &M.Bouden & S.Mhamed & K.Safieddine

ETUDE D'UNE TRANSMISSION DE MOTO

Sur certains modèles de moto (BMW, VX800, VMAX, ...), la transmission de puissance à la roue arrière, habituellement réalisée par chaîne, utilise une liaison rigide par cardan et pignons coniques (voir figure 1). Une modélisation simplifiée du mécanisme est proposée en 3D et en vue de dessus sur la page suivante.

Le couple moteur $\overrightarrow{C_m} = C_m \cdot \overrightarrow{y_1}$ est appliqué sur l'arbre **2** au point **M**, puis transmis à la roue **3** par l'intermédiaire de l'engrenage conique au point **K**.



Données :

- Puissance motrice appliquée sur l'arbre 2 en M (1 ch = 736 W)
  P_m = 100 ch à N_2 = 4000 tr/min
- Engrenage conique D_2 = 44 mm d'angle de cône primitif δ_2
  D_3 = 210 mm d'angle de cône primitif δ_3
  α = 20° (angle de pression)
- Diamètre de la roue D = 686 mm
- L'ensemble des pièces **{3+la roue}** sera noté **3**

✪ L'action de la chassie **1** de la moto sur l'ensemble 3 au niveau de la liaison rotule de centre C est modélisée par le torseur statique suivant (figure2) et (figure 3) :

$$ {}_{R_1}\{T_{1/3C}\}_C = {}_{R_1}\begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}_C $$

- ✪ L'action de la chassie **1** de la moto sur l'ensemble **3** au niveau de la liaison linéaire annulaire d'axe (B,$\overrightarrow{x_1}$) au point B est modélisée par le torseur statique suivant (figure2) et (figure 3) :

$$_{R_1}\{T_{1/3B}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{R_1 B}$$

- ✪ L'action du pignon **2** sur l'ensemble **3** au niveau de la transmission par engrenage au point K est modélisée par le torseur statique suivant (figure4):

$$_{R_1}\{T_{2/3}\}_K = \begin{Bmatrix} F_{R2/3} & 0 \\ F_{A2/3} & 0 \\ -F_T & 0 \end{Bmatrix}_{R_1 K}$$

- ✪ En **R**, l'action de contact de la roue avec le sol est modélisée par un glisseur du type (figure5):

$$_{R_1}\{T_{sol\ /3}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ \dfrac{F_y}{tg\,\varphi} & 0 \end{Bmatrix}_{R_1 R}$$

Remarque : les deux parties d'étude (statique et cinématique) sont indépendantes.

PARTIE STATIQUE : (10 points)

But : déterminer l'effort F_y, au niveau de la roue au point R pour la propulsion du véhicule.

1. Equilibre de la pièce 3 (figure2) et (figure 3).

1.1- Déterminer les expressions analytiques des actions $F_{R2/3}$ et $F_{A2/3}$ dues à l'engrènement exercées par **2** sur **3** en fonction de $\mathbf{F_T}$, $\boldsymbol{\delta_2}$ **et** $\boldsymbol{\alpha}$ **(voir figure 4).**

1.2- Exprimer alors le torseur de l'action du pignon **2** sur l'ensemble **3** au niveau de la transmission par engrenage au point K, $_{R_1}\{T_{2/3}\}_K$ en fonction de $\mathbf{P_m}$, $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{D_2}$, $\boldsymbol{\delta_2}$ **et** $\boldsymbol{\alpha}$ sachant que $\boldsymbol{F_T = \frac{60.P_m}{\pi.N_2.D_2}}$.

1.3- Transférer alors touts les torseurs appliqués sur l'ensemble 3 au point I, sachant que :

$$\overrightarrow{IK} = \frac{D_2}{2}\cdot\overrightarrow{x_1} - \frac{D_3}{2}\cdot\overrightarrow{y_1}\ ,\quad \overrightarrow{IC} = -(c - \frac{D_2}{2})\cdot\overrightarrow{x_1}\quad ,\quad \overrightarrow{IB} = (a + b + \frac{D_2}{2})\cdot\overrightarrow{x_1}$$

$$\text{et } \overrightarrow{IR} = (b + \frac{D_2}{2})\cdot\overrightarrow{x_1} - \frac{D}{2}\cdot\overrightarrow{y_1}$$

1.4- Appliquer le P.F.S. à l'ensemble 3 au point I, puis déterminer et calculer **seulement** l'effort $\boldsymbol{F_y}$, au niveau de la roue au point R pour la propulsion du véhicule avec tgφ=0.5.

PARTIE CINEMATIQUE: (10 points)

But : déterminer la loi entrée-sortie du mécanisme.

Le pignon 2 est entraîné en rotation par le moteur au point M non représenté, il transmet son mouvement au pignon intermédiaire 3 qui entraîne ensuite la roue arrière de la moto en rotation (Voir figure 2).

2. Calcul de la vitesse $\vec{V}(K \in 2/1)$.

Données :

- Bâti 1, lié au repère de référence $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- La configuration est équivalente à **la figure 6**.
- Le pignon 2, lié au repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$, $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$
- $\overrightarrow{AK} = \frac{D_2}{2}\cdot\overrightarrow{x_2} + (L - \frac{D_3}{2})\cdot\overrightarrow{y_1}$.
- Le paramètre variable du mécanisme est θ_2.

2.1- calculer la vitesse de rotations : $\vec{\Omega}(2/1)$

2.2- calculer la vitesse $\vec{V}(K \in 2/1)$.

2.3- Calculer alors le module de la vitesse $\left\|\vec{V}(K \in 2/1)\right\|$.

3. Calcul de la vitesse $\vec{V}(K \in 3/1)$.

Données **:**

- Le Bâti 1, est maintenant lié au repère de référence $R_1(I, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- La configuration est équivalente à **la figure 7**.
- Le pignon 3 et la roue sont liés au repère $R_3(I, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, $\theta_3 = (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = (\vec{z}_1, \vec{z}_3)$.
- $\overrightarrow{IK} = \frac{D_2}{2} \cdot \overrightarrow{x_1} - \frac{D_3}{2} \cdot \overrightarrow{y_3}$.
- Le paramètre variable du mécanisme est θ_3.

3.1- calculer la vitesse de rotations : $\vec{\Omega}(3/1)$

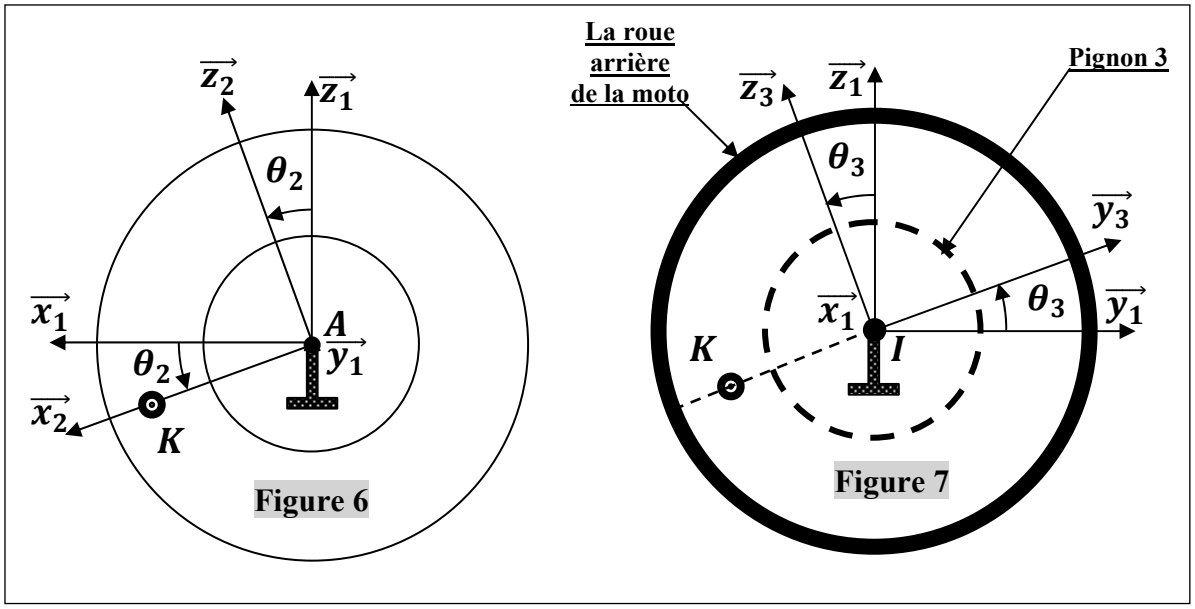
3.2- calculer la vitesse $\vec{V}(K \in 3/1)$.

3.3- Calculer alors le module de la vitesse $\left\|\vec{V}(K \in 3/1)\right\|$.

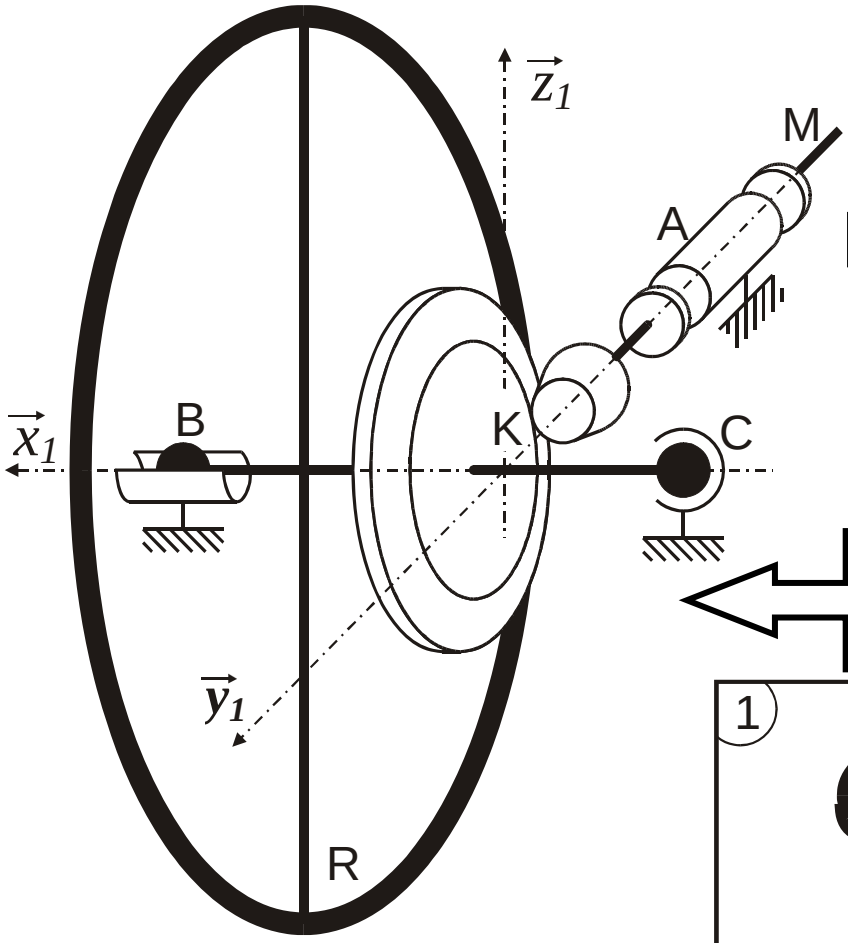
4. Détermination de la loi entrée-sortie du mécanisme.

4.1- Donner la condition de roulement sans glissement au point K.

4.2- Sachant que la condition de roulement sans glissement au point K dans ce cas peut être exprimé par $\left\|\vec{V}(K \in 2/1)\right\| = \left\|\vec{V}(K \in 3/1)\right\|$, donner alors la loi entrée-sortie $\dot{\theta}_3$**=f(**$\dot{\theta}_2$**)**.



Bon travail



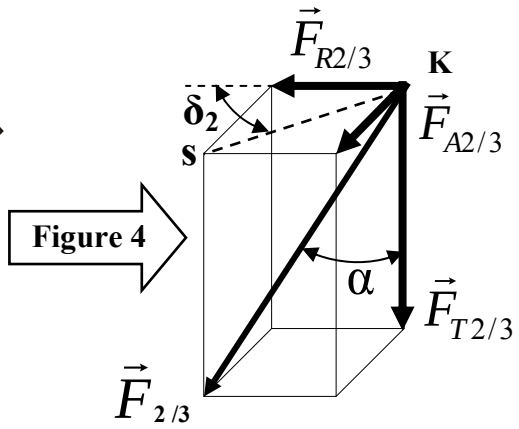
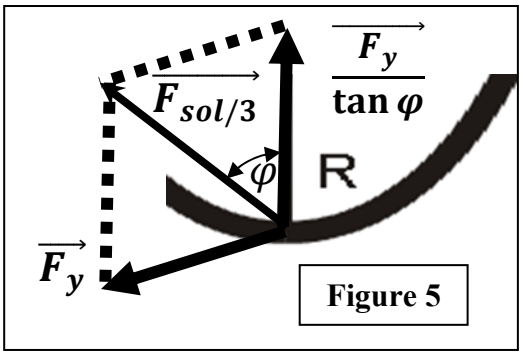


Figure2 :
Représentation spatiale du mécanisme



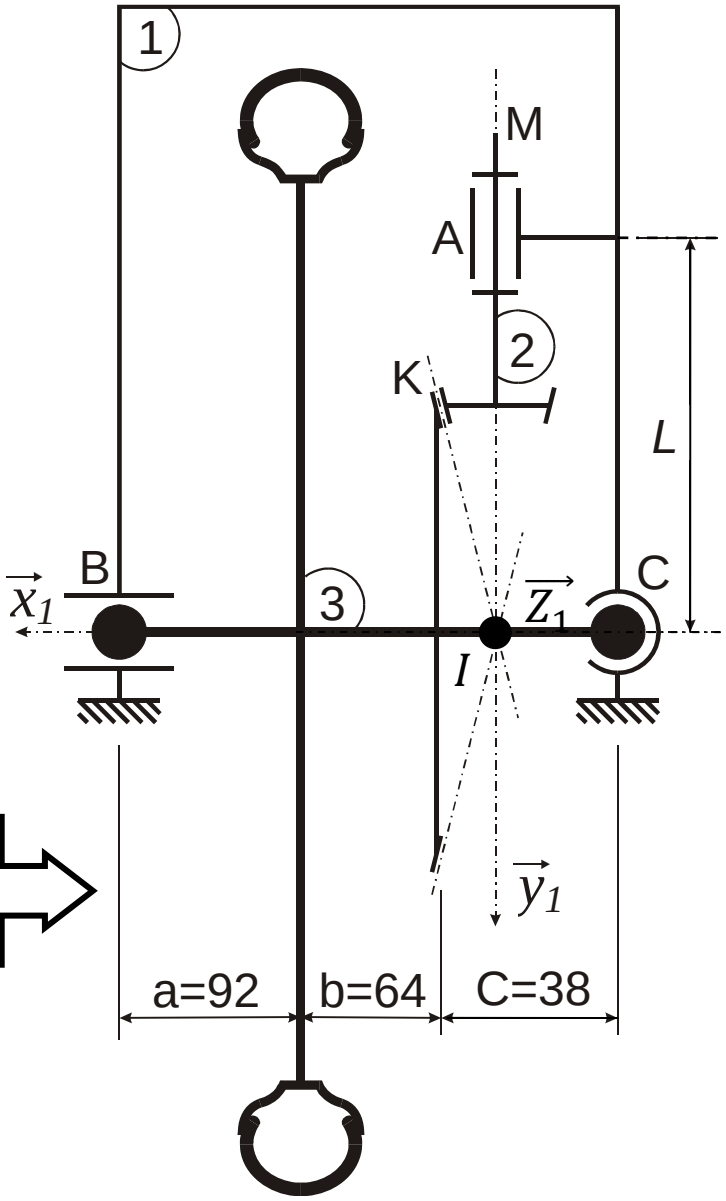


Figure3 :
Vue de dessus du mécanisme
(Les dimensions sont en mm)

Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Nabeul

Département de Génie Mécanique

EXAMEN DE MECANIQUE GENERALE

Année universitaire : 2010/2011. Date : le Janvier 2011

Classe : GM 11, 12, 13, 14,15 et 16. Nombre de pages : 5

Durée : 1 heure 30 mn. Documents : non autorisés.

Proposé par : S. Kalleli & M.Bouden & H.Amdouni & M.Jerbi

Dans le cadre du programme Eole 2005, de nombreuses éoliennes sont construites en Europe. La conception classique consiste à implanter tous les éléments mécaniques dans la nacelle **(voir figure1)**. Le rotor, où sont fixées les pâles, entraîne un générateur électrique. Une modélisation simplifiée du mécanisme est proposée sur la **figure 2**.

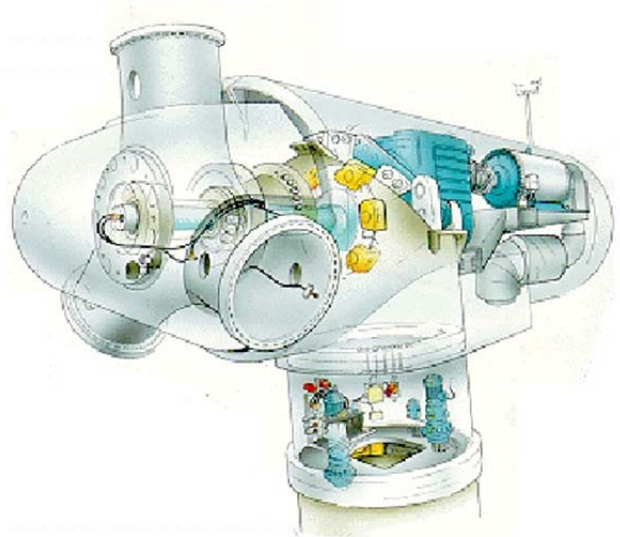


Figure 1 : Eolienne

Hypothèses et données :

- Toutes les liaisons définies sont géométriquement parfaites et sans frottement.
- Toutes les pièces sont de masses négligeables par rapport aux efforts mis en jeu.
- Toutes les distances sont exprimées **en millimètre** et les efforts **en Newton**.
- L'action de l'air sur le rotor est modélisable par un torseur d'action mécanique au point P :

$$\left\{\boldsymbol{\tau}_{\left(air/_{rotor}\right)}\right\}_{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{(P,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} \qquad \boldsymbol{Avec} \begin{cases} \boldsymbol{F} > 0 \\ \boldsymbol{M} > 0 \end{cases}$$

- L'action du pignon (3) sur la roue (2) est modélisable par un torseur d'action mécanique au point K :

$$\left\{\boldsymbol{\tau}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{R}_3/_{roue(2)}}\right)\right\}_{K} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F_T} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{F_A} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{F_R} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{(K,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F_T} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{F_T tg\beta} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{F_T \frac{tg\alpha}{cos\beta}} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{(K,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

Les paramètres d'entrées sont :

Action de l'air sur le rotor : $\boldsymbol{F = 8735\ N}$

Le couple est $\boldsymbol{M = 4526\ 10^3\ N\ mm}$

Les caractéristiques des engrenages sont :

Engrenage à denture hélicoïdale en K : $D_2 = 204$

$D_{31} = 48$

$\alpha = 20\ °$

$\beta = 18\ °$

Engrenage à denture hélicoïdale en L : $D_{32} = 292$

$D_4 = 66$

$\alpha_1 = 20\ °$

$\beta_1 = 12°$

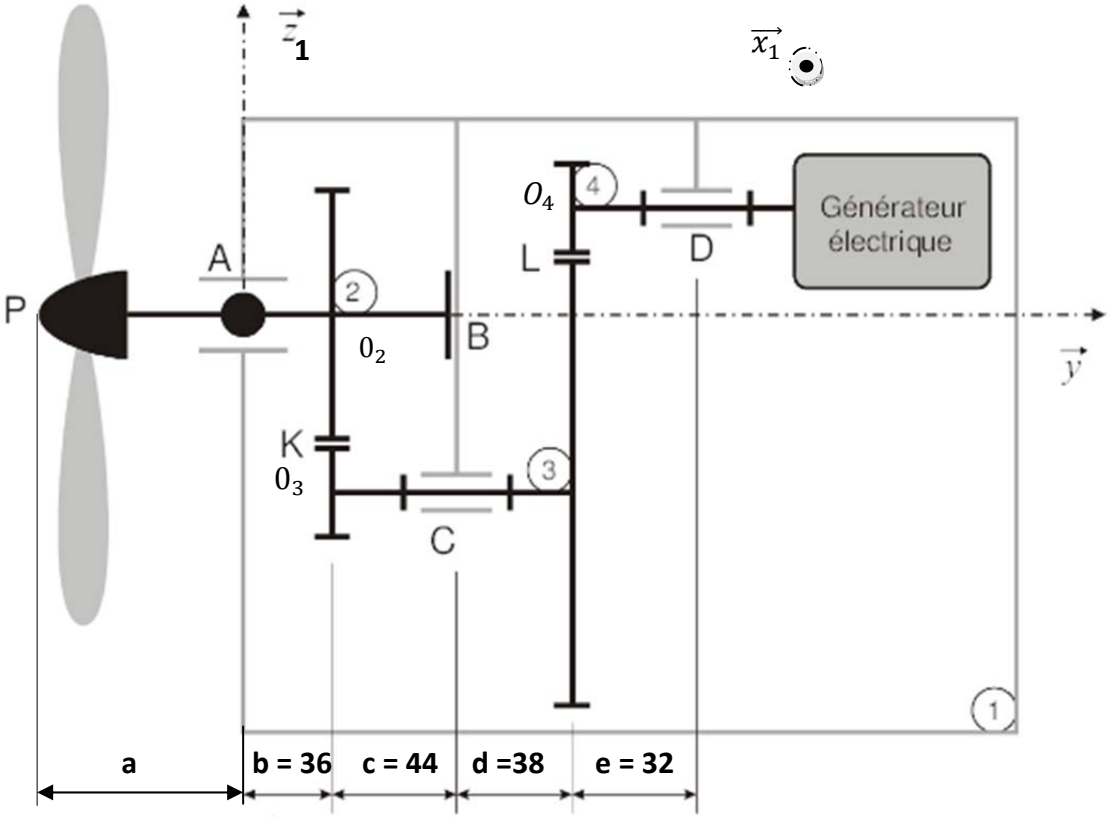


Figure2 : modélisation de l'éolienne.

Remarque : les deux parties d'étude (statique et cinématique) sont indépendantes.

I. ETUDE STATIQUE : (13 points)

Détermination des inconnues statiques au niveau des liaisons.

Dans cette étude statique on va isoler **l'ensemble (2) =** $\{\boldsymbol{rotor} + \boldsymbol{arbre} + \boldsymbol{roue}\ (\mathbf{2})\}$

- **Equilibre de l'ensemble (2).**

1) Faire le bilan des actions mécaniques appliquées sur **l'ensemble (2).**

2) Déterminer les torseurs statiques, à leurs points d'application, respectivement au niveau de la **liaison linéaire annulaire d'axe** $(\boldsymbol{A}, \overrightarrow{\boldsymbol{y_1}})$ et au niveau de la **liaison appui plan de normal** $(\boldsymbol{B}, \overrightarrow{\boldsymbol{y_1}})$

3) Transférer tous les torseurs statiques au **point B**, sachant que :

$\overrightarrow{\boldsymbol{BP}} = -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\overrightarrow{\boldsymbol{y_1}}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{BA}} = -(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\overrightarrow{\boldsymbol{y_1}}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{BK}} = -\boldsymbol{c}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_1}} - \frac{\boldsymbol{D_2}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{z_1}}$;

4) Appliquer le principe fondamental de la statique et déterminer numériquement $\boldsymbol{F_T}$ **,** ainsi que les inconnues statiques au niveau de la liaison linéaire annulaire d'axe $(A, \overrightarrow{y_1})$ et la liaison appui plan de normale $(B, \overrightarrow{y_1})$.

II. ETUDE CINEMATIQUE: (7 points)

Détermination de la loi entrée/sortie du mécanisme.

Paramétrage du mécanisme (Figure 3).

On considère les repères orthonormés directs suivants :

- $R_1\left(A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$: repère absolu (fixe) lié au bâti (1)
- $R_2(0_2, \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}_2)$: repère mobile lié à (2) ; $Avec \quad \theta_2 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$
- $R_3(0_3, \vec{x}_3, \vec{y}, \vec{z}_3)$: repère mobile lié à (3) ; $Avec \quad \theta_3 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_3}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_3})$
- $R_4(0_4, \vec{x}_4, \vec{y}, \vec{z}_4)$: repère mobile lié à (4) ; $Avec \quad \theta_4 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_4}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_4})$

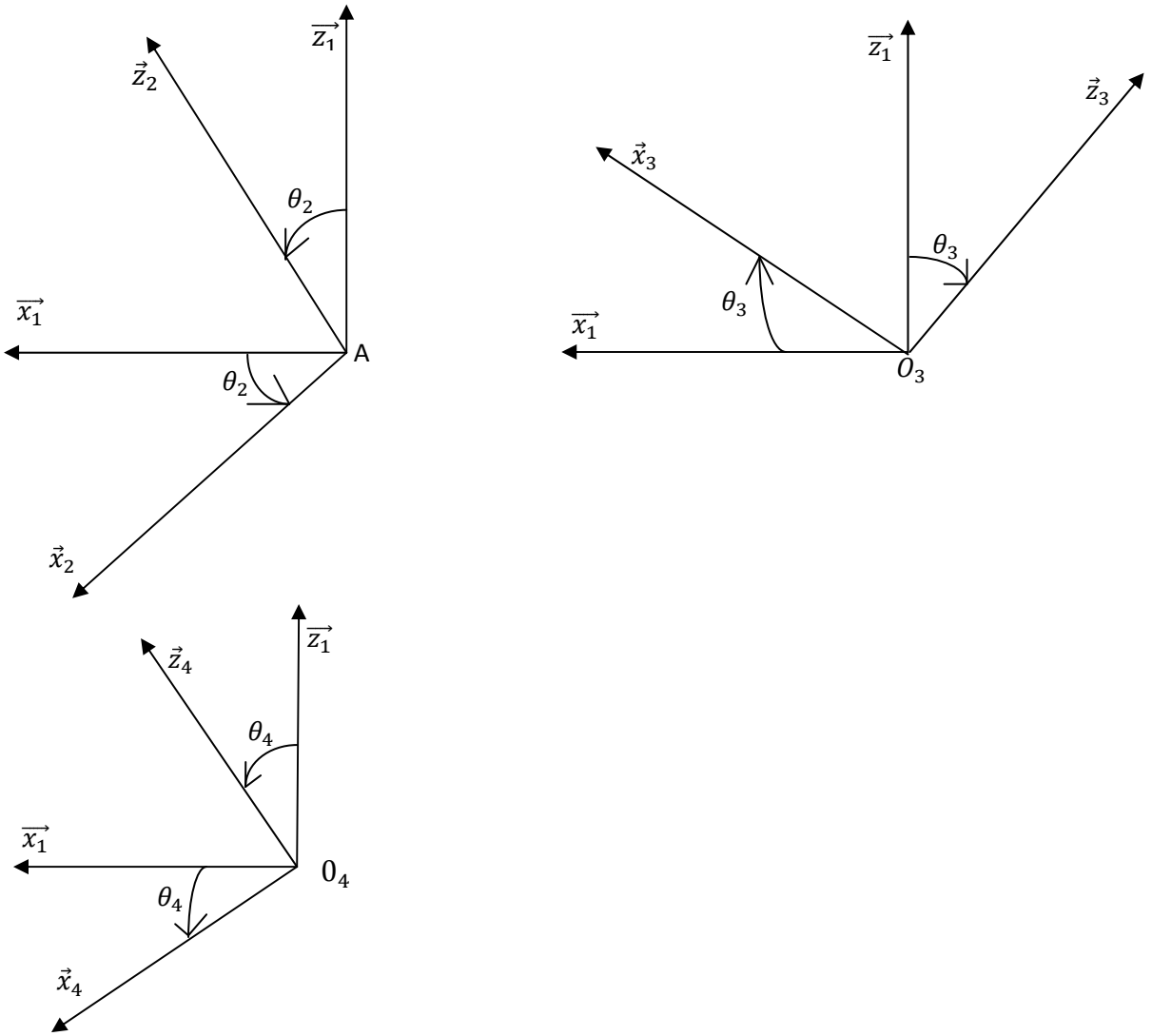


Figure 3

On donne :

$\overrightarrow{AK_2} = b\,\vec{y}_1 + \frac{D_2}{2}\,\overrightarrow{z_2}$ et $\overrightarrow{AK_3} = b\,\vec{y}_1 - (\frac{D_2}{2} + \frac{D_{31}}{2})\vec{z}_1 + \frac{D_{31}}{2}\,\overrightarrow{z_3}$

On adoptera la notation suivante :

$\vec{V}(K \in 2/1) = \vec{V}(K2/1)$ **et** $\vec{V}(K \in 3/1) = \vec{V}(K3/1)$

1) Calcul de la vitesse $\vec{V}(K2/1)$

a) Calculer la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(2/1)$.

b) Calculer la vitesse $\vec{V}(K2/1)$.

2) Calcul de la vitesse $\vec{V}(K3/1)$

a) Calculer la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(3/1)$.

b) Calculer la vitesse $\vec{V}(K3/1)$.

3) Sachant que la relation de roulement sans glissement au point K se traduit par :

$\|\vec{V}(K2/1)\| = \|\vec{V}(K3/1)\|$, donner la relation entre $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_3$.

4)Sachant que $\dot{\theta}_4 = \frac{D_{32}}{D_4}\dot{\theta}_3$, et en se référant au résultat de la question (3), déterminer la loi entrée/sortie du mécanisme : $\dot{\theta}_4 = f(\dot{\theta}_1)$.

Bon Courage.

Corrigé de l'examen de mécanique générale Janvier 2011

I. Etude statique (13 points)

1)

- **Action de l'air sur le rotor au point P**
- **Action du pignon 31 sur la roue (2) au point K**
- **Action de la liaison linéaire annulaire au point A**
- **Action de l'appui plan au point B**

Donc en tout quatre actions mécaniques

2)

- Liaison linéaire annulaire d'axe $(A, \overrightarrow{y_1})$:

$$\{\tau_{lin/2}\}_{R_1}^{A} = \left\{\begin{matrix} X_A & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{matrix}\right\}$$

- Liaison appui plan de normal $(B, \overrightarrow{y_1})$:$\{\tau_{plan/2}\}_{R_1}^{B} = \left\{\begin{matrix} 0 & L_B \\ Y_B & 0 \\ 0 & N_B \end{matrix}\right\}$

3)

Transfert des moments en B

❖ $$\vec{M}_B(\vec{R}_{air/rotor}) = \vec{M}_A(\vec{R}_{air/rotor}) + \overrightarrow{BP} \wedge \vec{R}_{air/rotor}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -(a+b+c) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_B(\vec{R}_{air/rotor}) = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d'ou\ \{\tau_{air/rotor}\}_{R_1}^{B} = \left\{\begin{matrix} 0 & O \\ F & M \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}$$

❖ $$\vec{M}_B(\vec{R}_{3/2}) = \vec{M}_K(\vec{R}_{3/r2}) + \overrightarrow{BK} \wedge \vec{R}_{3/2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -C \\ -\frac{D_2}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_T \\ -F_T tan\beta \\ F_T \frac{tan\alpha}{cos\beta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -CF_T \frac{tan\alpha}{cos\beta} - \frac{D_2}{2} F_T tan\beta \\ -\frac{D_2}{2} F_T \\ CF_T \end{pmatrix}$$

$$D'ou\left\{\tau_{\vec{R}_{3/2}}\right\}_{R_1}^{B} = \left\{\begin{matrix} F_T \\ -F_T tan\beta \\ F_T \frac{tan\beta}{cos\beta} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} -F_T\left(C\frac{tan\alpha}{cos\beta}+\frac{D_2}{2}tan\beta\right) \\ -\frac{D_2}{2}F_T \\ CF_T \end{matrix}\right\}$$

- $\vec{M}_B(\vec{R}_{lin/2}) = \vec{M}_A(\vec{R}_{lin/2}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{lin/2}$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-(b+C)\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}X_A\\0\\Z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(b+c)Z_A\\0\\(b+c)X_A\end{pmatrix}$$

$$D'ou\left\{\tau_{\vec{R}_{lin/2}}\right\}_{R_1}^{B} = \left\{\begin{matrix} X_A \\ 0 \\ Z_A \end{matrix}\middle| \begin{matrix} -(b+c)Z_A \\ 0 \\ (b+c)X_A \end{matrix}\right\}$$

- $\left\{\tau_{\vec{R}_{plan/2}}\right\}_{R_1}^{B} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} L_B \\ 0 \\ N_B \end{matrix}\right\}$

4) PFS : $\sum\{\tau\}_B^{R_1} = \{0\}$

D'où $\left\{\begin{matrix} 0 \\ F \\ 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} O \\ M \\ 0 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} F_T \\ -F_T tan\beta \\ F_T \frac{tan\beta}{cos\beta} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} -F_T\left(C\frac{tan\alpha}{cos\beta}+\frac{D_2}{2}tan\beta\right) \\ -\frac{D_2}{2}F_T \\ CF_T \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} X_A \\ 0 \\ Z_A \end{matrix}\middle| \begin{matrix} -(b+c)Z_A \\ 0 \\ (b+c)X_A \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} L_B \\ 0 \\ N_B \end{matrix}\right\} =$

$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0_B \\ 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$

Théorème de la résultante :

$0 + F_T + X_A + 0 = 0$ **(1)**

$F - F_T tan\beta + 0 + Y_B = 0$ **(2)**

$O + F_T \frac{tan\beta}{cos\beta} + Z_A + 0 = 0$ **(3)**

Théorème du moment :

$O - F_T\left(C\frac{tan\alpha}{cos\beta}+\frac{D_2}{2}tan\beta\right) - (b+c)Z_A + L_B = 0$ **(4)**

$M - \frac{D_2}{2}F_T + 0 + 0 = 0$ **(5)**

$0 + CF_T + (b+c)X_A + N_B = 0$ **(6)**

Résolution :

$D'après\ (5) :\ F_T = \frac{2M}{D_2}$; $AN :\ F_T = 44{,}373\ 10^3 N$

$D'après\ (1) : X_A = -F_T$; $AN : X_A = -44{,}373\ 10^3 N$

$D'après\ (2) :\ Y_B = F_T tan\beta - F$; $AN :\ Y_B = 5682{,}67\ N$

$D'après\ (3) : Z_A = -F_T \frac{tan\beta}{cos\beta}$; $AN: Z_A = -16981{,}59\ N$

$D'après\ (4) :\ L_B = (b+c)Z_A + F_T\left(C\frac{tan\alpha}{cos\beta} + \frac{D_2}{2}tan\beta\right)$; $AN: L_B = 859272{,}7\ N.mm$

$D'après\ (6) : N_B = -CF_T - (b+c)X_A$; $AN: N_B = 1597428\ N$

Etude Cinématique (7 points):

1)

a) $\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{R_2/R_1} = ?$

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}_2\vec{y}_1 = \dot{\theta}_2\vec{y}_2$$

$$\vec{V}_{k2/1} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AK_2}\right)_{R1} = \frac{d}{dt}\left(b\vec{y_1} + \frac{D_2}{2}\vec{z_2}\right)_{R1}$$

$$= b\frac{d}{dt}(\vec{y_1})_{R1} + \frac{D_2}{2}\frac{d}{dt}(\vec{z_2})_{R1}$$

$$= \frac{D_2}{2}\left[\frac{d}{dt}(\vec{z_2})_{R2} + \vec{\Omega}_{2/1}\wedge\vec{z_2}\right] = \frac{D_2}{2}\left[\dot{\theta}_2\vec{y_1}\wedge\vec{z_2}\right] \qquad = \frac{D_2}{2}\left[\dot{\theta}_2\vec{y_2}\wedge\vec{z_2}\right] =$$

$$\frac{D_2}{2}\begin{pmatrix}0\\ \dot{\theta}_2\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{D_2}{2}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \frac{D_2}{2}\dot{\theta}_2\vec{x}_2$$

$$\boxed{\vec{V}_{k2/1} = \frac{D_2}{2}\dot{\theta}_2\vec{x}_2}$$

2)

a) $\vec{\Omega}_{3/1} = \vec{\Omega}_{R_3/R_1} = ?$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{3/1} = -\dot{\theta}_3\vec{y}_1 = -\dot{\theta}_3\vec{y}_3}$$

b) $\vec{V}_{k3/1} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AK_3}\right)_{R1} = \frac{d}{dt}\left(b\vec{y_1} - \left(\frac{D_2}{2} + \frac{D_{31}}{2}\right)\vec{z_1} + \frac{D_{31}}{2}\vec{z_3}\right)_{R1}$

$$= \frac{D_{31}}{2}\frac{d}{dt}(\vec{z_3})_{R1} = \frac{D_{31}}{2}\left[\frac{d}{dt}(\vec{z_3})_{R3} + \vec{\Omega}_{3/1}\wedge\vec{z_3}\right]$$

$$= \frac{D_{31}}{2}\begin{pmatrix}0\\ \dot{\theta}_3\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{k3/1} = \frac{D_{31}}{2}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{V}_{k3/1} = -\frac{D_{31}}{2}\dot{\theta}_3\vec{x_3}}$$

3) $\left\|\vec{V}_{k2/1}\right\| = \left\|\vec{V}_{k3/1}\right\|$

$$\frac{D_2}{2}\dot{\theta}_2 = \frac{D_{31}}{2}\dot{\theta}_3 \longrightarrow \boxed{\dot{\theta}_2 = \frac{D_{31}}{2}\dot{\theta}_3}$$

4) $\dot{\theta}_4 = \frac{D_{32}}{D_4}\,\dot{\theta}_3 \longrightarrow \dot{\theta}_4 = \frac{D_{32}}{D_4}\frac{D_2}{D_{31}}\,\dot{\theta}_2$

Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Nabeul
Département de Génie Mécanique

EXAMEN DE MECANIQUE GENERALE

Année universitaire : 2011/2012. Date : le 07 /01/2012
Classe : GM 11, 12, 13, 14,15 et 16. Nombre de pages : 4
Durée : 1 heure30 . Documents : non autorisés.

Proposé par : Amdouni.H & K.Safieddine & Bouden.M & J.Mourad

ETUDE D'UN COMPRESSEUR MONO-PISTON

La figure 1 et la figure 2 représentent un compresseur mono-piston qui permet, à partir d'un moteur entraînant l'arbre **(4)** en rotation autour de son axe, de comprimer un fluide dans la chambre formée par le fond du piston **(7)**, le cylindre **(30)** et la culasse **(9)**. Le système constitué de l'arbre d'entrée **(4)** ayant une forme générale qui rappelle celle d'une manivelle, de la bielle **(6)** et du piston **(7)** est souvent désignée sous le terme de système bielle manivelle, qui transforme la rotation de la manivelle à une translation du piston **(7)** dans le cylindre **(30)**. La descente du piston permet l'aspiration du fluide sous la pression atmosphérique et la montée du piston permet son refoulement sous une pression variante entre 6 et 8 bars dans le circuit d'utilisation.

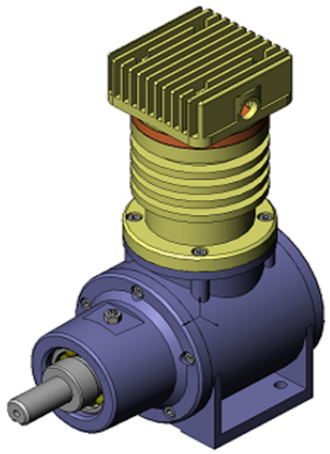
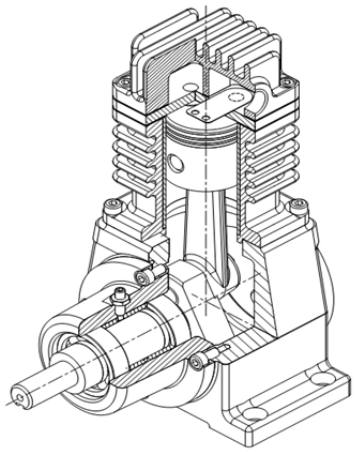
Perspective vue extérieure	Perspective en coupe
	

Figure 1 *: compresseur mono-piston vue extérieure et perspective en coupe.*

DONNEES ET HYPOTHESES :

- Toutes les pièces du mécanisme sont rigides et indéformables**.**
- Tous les poids des pièces sont négligeables devant les actions mécaniques exercées.
- Les liaisons seront considérées comme parfaites.
- L'ensemble lié (arbre d'entrée **(4)** et le maneton**(5)**) sera noté(**S**) durant l'étude statique du système.
- Le repère **(A,** $\vec{x}$ **,** $\vec{y}$ **,** $\vec{z}$ **)** est un repère fixe lié au bâti.
- La liaison en A est une liaison linéaire annulaire **d'axe (A,** $\vec{x}$ **)**.
- La liaison en C est modélisée par une liaison rotule (sphérique) **de centre C**.
- ***<u>Les actions mécaniques exercées sur l'ensemble(S) sont modélisées dans le repère</u>*** **(A,** $\vec{x}$ **,** $\vec{y}$ **,** $\vec{z}$ **),** ***<u>par les torseurs suivants :</u>***

$$\{\tau_{M/S}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \; et \; \{\tau_{13/S}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A \; et \; \{\tau_{12/S}\}_C = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}_C$$

- ***Pour simplifier l'étude statique du système, nous supposons que l'action mécanique exercée par la bielle (6) sur l'ensemble (S) sera modélisée par le torseur suivant « figure3 » :***

$$\{\tau_{6/S}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F\sin\beta & 0 \\ F\cos\beta & 0 \end{Bmatrix}_B$$

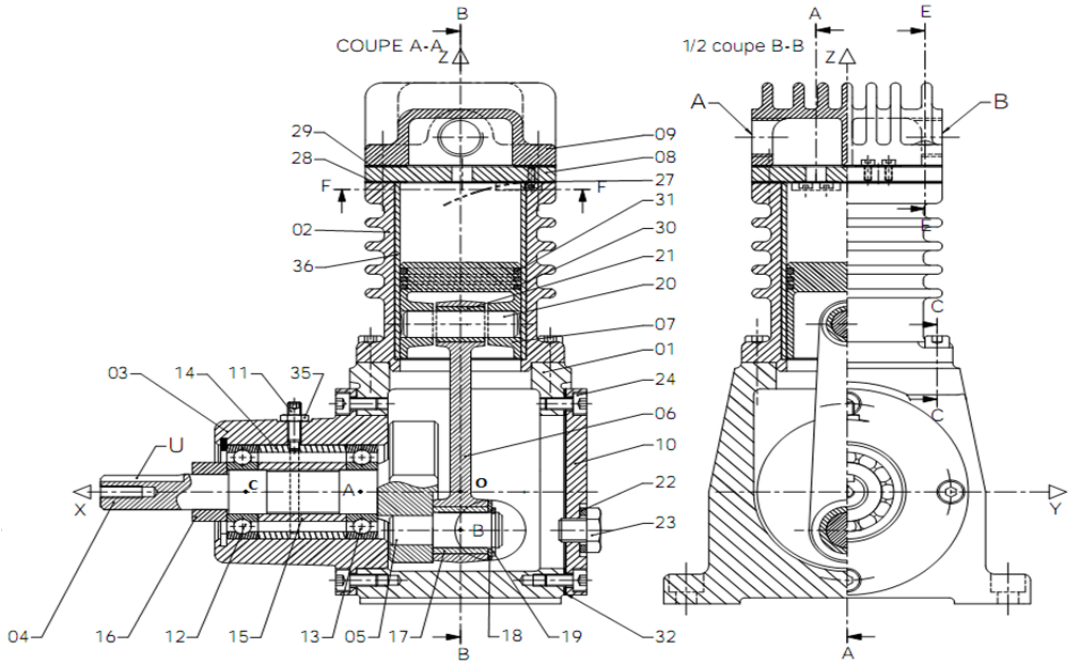


Figure 2 *: Dessin d'ensemble en coupe du compresseur mono-piston.*

TRAVAIL DEMANDE :

Remarque : Les deux parties d'étude (statique et cinématique) sont indépendantes.

PARTIE 1 : ETUDE STATIQUE (12 points)

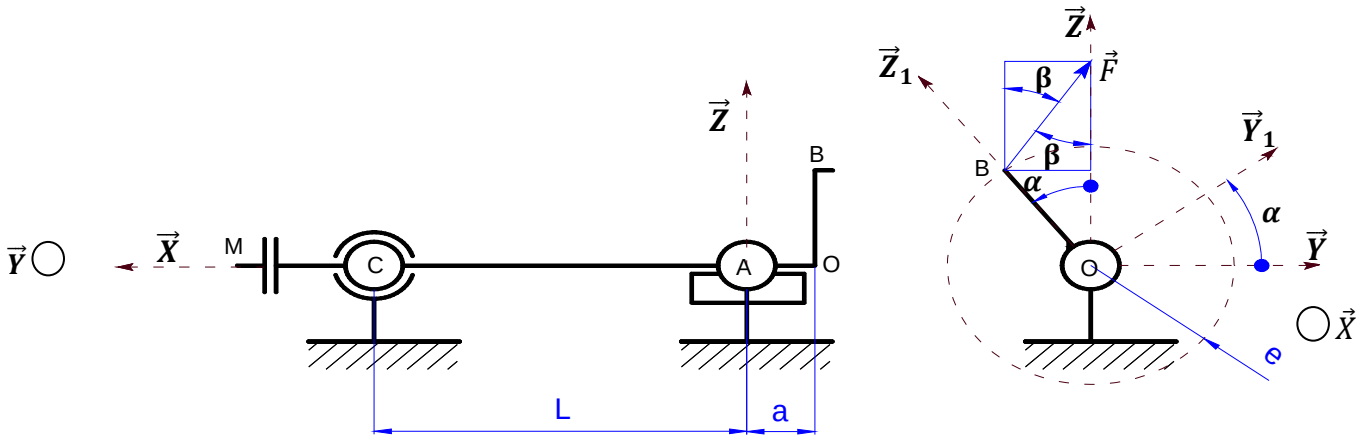


Figure 2 *: Schéma cinématique de l'ensemble isolé**(S)**.*

1. *Transférer tous les torseurs statiques au point **A**, sachant que :* ***(2points)***

$\overrightarrow{AC} = L\vec{x}$ *et* $\overrightarrow{AB} = -a\,\vec{x} + e\,\vec{z_1}$ *avec* $\vec{z_1} = \cos\alpha\,\vec{z} - \sin\alpha\,\vec{y}$

2. *Appliquer le PFS sur l'équilibre de l'ensemble **(S)** et déterminer* ***<u>les expressions analytiques</u>*** *des* inconnues *statiques* ***(Y_A et Z_A)*** *de la liaison linéaire annulaire d'axe (A, $\vec{x}$), de la liaison rotule de centre C* ***(X_C,Y_C et Z_C)*** *et de l'action mécanique **F** exercée par la bielle **(6)** sur l'ensemble **(S)** en fonction des données du problème :*

C_m ,e, α ,β, a et L. ***(4.5points)***

3. *Simplifier l'expression analytique de **F** sachant que :* ***(0.5points)***

$$\cos\alpha\,.\sin\beta + \sin\alpha\,.\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

4. *Nous allons dans ce qui va suivre, limiter l'étude statique à la phase de refoulement du fluide, c'est-à-dire la position **PMH** « **P**oint **M**ort **H**aut » du piston**(7)** tel que :* ***α=90° et β=0°***
Avec (L=51mm, a=48mm, e=20mm et C_m=3.2 10^3Nmm).*Calculer alors les inconnues statiques* ***(Y_A, Z_A, X_C,Y_C , Z_C) et F.*** ***(3points)***

5. *Déterminer l'expression et calculer le module* $\|\overrightarrow{Rc}\|$ *relatif à l'action mécanique de la liaison rotule de centre **C** et le module* $\|\overrightarrow{RA}\|$ *relatif à l'action mécanique de la liaison linéaire annulaire **d'axe (A, $\vec{x}$).*** ***(2points)***

PARTIE 2 : ETUDE CINEMATIQUE (8 points)

Le but de cette partie est la détermination de la loi d'entrée sortie du système : $\dot{z} = f(\dot{\alpha})$

*Le système étudié sera considéré comme un **système bielle manivelle** dont le schéma cinématique est représenté dans la **figure 4***

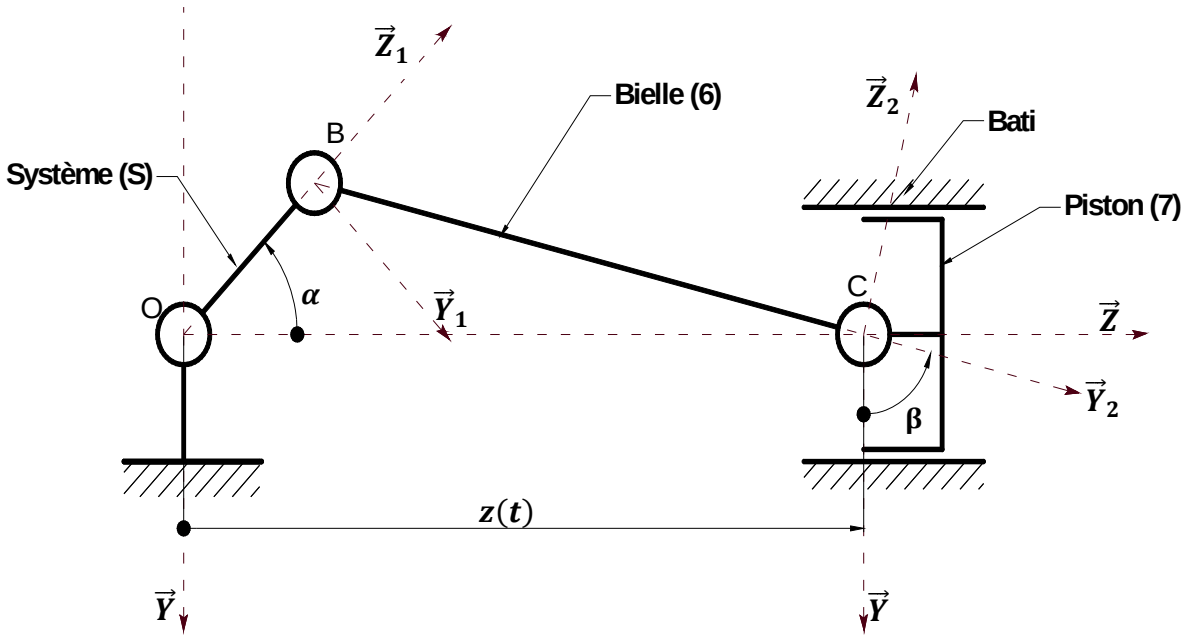
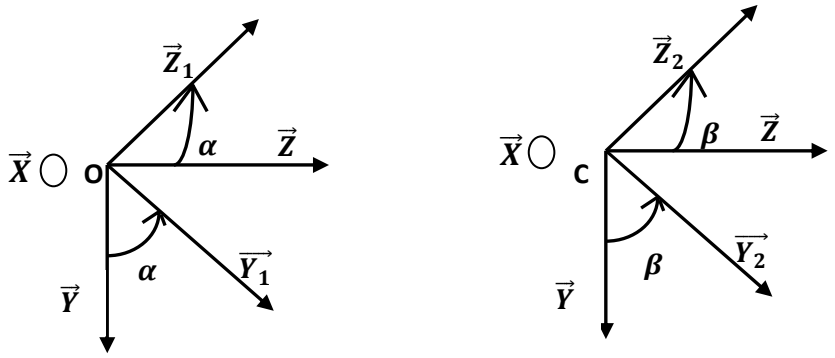


Figure 4 : Schéma cinématique du système bielle manivelle

Repères et paramètres de position

On considère les repères orthonormés directs suivants :

- $R\left(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right)$ *: repère absolu lié au bâti*
- $R_1(B,\vec{X},\vec{Y_1},\vec{Z_1})$ *: repère mobile lié au système* ***(S).***
  Avec $\boldsymbol{\alpha} = \left(\vec{Y},\vec{Y_1}\right) = \left(\vec{Z},\vec{Z_1}\right)$
- $R_2\left(C,\vec{X},\vec{Y_2},\vec{Z_2}\right)$ *: repère mobile lié à la bielle* $(\mathbf{6})$; *Avec* $\boldsymbol{\beta} = \left(\vec{Y},\vec{Y_2}\right) = \left(\vec{Z},\vec{Z_2}\right)$
- $\overrightarrow{\mathbf{0C}} = \boldsymbol{e}\,\vec{\boldsymbol{Z_1}} + \boldsymbol{l}\,\vec{\boldsymbol{Y_2}}$ ***si C ∈ (6), avec e et l sont deux constantes***
- $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \boldsymbol{z(t)}\vec{\boldsymbol{Z}}$ ***, si C ∈ (7)***



1. *Donner l'expression des vitesses de rotations :* $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{(\boldsymbol{R_1/R})}$ *et* $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{(\boldsymbol{R_2/R})}$ ***(2points)***

2. *Détermination de la vitesse au point* ***C*** *appartenant* ***à la bielle (6)*** *par rapport* ***R***

a. *Déterminer l'expression de la vitesse* $\vec{\boldsymbol{V}}$***(C∈6/R)*** ***(2 points)***

b. *Exprimer la vitesse* $\vec{\boldsymbol{V}}$***(C ∈ 6/R)*** *dans le repère* $\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Y}},\vec{\boldsymbol{Z}}\right)$ ***(1point)***

c. *En adoptant la relation :* $-\boldsymbol{e}\,\dot{\boldsymbol{\alpha}}\cos\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{l}\,\dot{\boldsymbol{\beta}}\sin\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$. *Simplifier l'expression* de $\vec{\boldsymbol{V}}$**(C ∈6/R)** ***(0,5point)***

Remarque *: cette relation est déduite à partir de la dérivée par rapport au temps du résultat obtenu en faisant (* $\overrightarrow{\mathbf{0C}}.\vec{\boldsymbol{Y}} = \mathbf{0}$ *)*

3. *Déterminer l'expression de la vitesse* $\vec{\boldsymbol{V}}$**(C∈7/R)** ***(1point)***

4. *Sachant que :* $\vec{\boldsymbol{V}}$**(C ∈7/R)** = $\vec{\boldsymbol{V}}$**(C ∈6/R)** . *Déduire alors la relation entre les paramètres cinématiques du système :* $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{f}\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)$ ***(0,5point)***

5. *En s'appuyant sur les deux relations suivantes :*

$$\boldsymbol{\beta} = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{l}}\sin\boldsymbol{\alpha}\right) \text{ et } \dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{-\frac{\boldsymbol{e}\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{\boldsymbol{l}}\cos\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{l}}\sin\boldsymbol{\alpha}\right)^2}}$$

Déduire alors la loi d'entrée sortie du mécanisme : $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ ***(1point)***

<u>Bon travail</u>

Correction d'examen de mécanique générale

Partie 1 : Etude statique :

1) Transfert des torseurs statiques au point A :

- $\{\boldsymbol{\tau}_{12/5}\}_{C\to A}$

On a $\vec{M}_A(\vec{R}_C) = \vec{M}_C(\vec{R}_C) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_C$

$$\longrightarrow \overrightarrow{M}_A(\vec{R}_C) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}L\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}X_C\\Y_C\\Z_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-L\,Z_C\\L\,Y_C\end{pmatrix}$$

D'où : $\boxed{\{\boldsymbol{\tau}_{12/s}\}_A = \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{X_C}\\\boldsymbol{Y_C}\\\boldsymbol{Z_C}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{-L\,Z_C}\\\boldsymbol{L\,Y_C}\end{matrix}\right\}}$

- $\{\boldsymbol{\tau}_{6/5}\}_{B\to A}$

On a $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{M}_B(\vec{F}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$

Avec: $\overrightarrow{AB} = -a\vec{x} + e\,\vec{z}_1 = -a\,\vec{x} = -a\,\vec{x} + e\,(cos\alpha\,\vec{z} - sin\alpha\vec{y})$

D'où $\overrightarrow{AB} = -a\vec{x} - e\sin\alpha\;\vec{y} + e\cos\alpha\;\vec{z}$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a\\-e\sin\alpha\\e\cos\alpha\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\F\sin\beta\\F\cos\beta\end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \begin{pmatrix}-e\sin\alpha\cos\beta - e\,F\cos\alpha\sin\beta\\a\,F\cos\beta\\-a\,F\sin\beta\end{pmatrix}$$

D'où $\{\boldsymbol{\tau}_{6/5}\}_A = \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{F\,sin\,\beta}\\\boldsymbol{F\,cos\,\beta}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{-e\,F\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)}\\\boldsymbol{a\,F\,cos\,\beta}\\\boldsymbol{-a\,F\,sin\,\beta}\end{matrix}\right\}_A$

2) PFS appliqué sur l'ensemble (S) :

$\{M/S\}_A + \{\tau_{13/S}\}_A + \{\tau_{12/S}\}_A + \{\tau_{6/S}\}_A = \{0\}$

D'où :

$$\left\{\tau_{\frac{M}{S}}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}C_m\\0\\0\end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix}0\\Y_A\\Z_A\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix}X_C\\Y_C\\Z_C\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\-L\,Z_C\\L\,Y_C\end{matrix}\right\}_A$$

$$+ \left\{\begin{matrix}0\\F\,sin\,\beta\\F\,cos\,\beta\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-e\,F\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)\\a\,F\,cos\,\beta\\-a\,F\,sin\,\beta\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right\}$$

D'où on obtient le système d'équations suivant :

$X_C = 0$ (1)
$Y_A + Y_C + F\sin\beta = 0$ (2)
$Z_A + Z_C + F\cos\beta = 0$ (3)
Cm$- e\,F\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta) = 0$ (4)
$-L\,Z_C + a\,F\cos\beta = 0$ (5)
$L\,Y_C - F\sin\beta = 0$ (6)

D'où :
$X_C = 0$ N D'après (1)

$$F = \frac{C_m}{e\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)}$$ D'après (4)

$$Y_C = \frac{a sin\,\beta}{L} F$$ D'après (6)

$$Y_C = \frac{a\,sin\,\beta C_m}{eL\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)}$$

$Y_A = -Y_C - F\sin\beta$ D'après (2)

D'où $Y_A = -\frac{a\,sin\,\beta C_m}{eL\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)} - \frac{C_m\,sin\,\beta}{e\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)}$

$$Z_C = \frac{a\,F\cos\beta}{L}$$ D'après (5)

D'où : $$Z_C = \frac{a\,C_m\cos\beta}{eL(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)}$$

$Z_A = -Z_C - F\cos\beta = 0$ D'après (3)

D'où : $Z_A = -\frac{a\,C_m\cos\beta}{eL(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)} - \frac{C_m\,\cos\beta}{e\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)}$

3) $$F = \frac{C_m}{e\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)} = \frac{C_m}{e\,\sin(\alpha+\beta)}$$

4) Etude statique relative à la position PMH ($\alpha = 90°$, $\beta = 0°$)
Avec $\left(L = 51\,mm, a = 48\,mm, e = 20\,mm\ et\ C_m = 3{,}2\ 10^3 N.mm\right)$
Applications numériques :
$F = 160\,N$; $Y_A = 0\,N$; $Z_A = -310,59\,N$; $X_C = 0\,N$; $Y_C = 0\,N$; $Z_C = 150,59\,N$

5) $\|\overrightarrow{R_C}\| = \sqrt{(X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2)} = |Z_C| = 150{,}59N$

$\|\overrightarrow{R_A}\| = \sqrt{(Y_A^2 + Z_A^2)} = |Z_A| = 310{,}59N$

Partie 2 : Etude cinématique :

1) $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{(\boldsymbol{R_1/R})} = \dot{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{\boldsymbol{X}}$

$\vec{\Omega}_{(R_2/R)} = \dot{\beta}\ \vec{X}$

2)

a. $\vec{V}(C\in 6/R) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}\right)_R$, *avec* $C \in (6)$

D'où $\vec{V}(C\in 6/R) = \left(\frac{d}{dt}\left(e\,\vec{Z}_1 + l\,\vec{Y}_2\right)\right)_R$

$$= e\left[\left(\frac{d}{dt}\vec{Z}_1\right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \vec{Z}_1\right] + l\left[\left(\frac{d}{dt}\vec{Y}_2\right)_{R_2} + \vec{\Omega}_{(R_2/R)} \wedge \vec{Y}_2\right]$$

D'où $\vec{V}(C\in 6/R) = -e\,\dot{\alpha}\,\vec{Y}_1 + l\,\dot{\beta}\,\vec{Z}_2$

b. On a $\vec{Y}_1 = \cos\alpha\,\vec{Y} + \sin\alpha\,\vec{Z}$

$\vec{Z}_2 = -\sin\beta\,\vec{Y} + \cos\beta\,\vec{Z}$

$\vec{V}(C\in 6/R) = -e\,\dot{\alpha}\left(\cos\alpha\,\vec{Y} + \sin\alpha\,\vec{Z}\right) + l\,\dot{\beta}\left(-\sin\beta\,\vec{Y} + \cos\beta\,\vec{Z}\right)$

D'où $\vec{V}(C\in 6/R) = (-e\dot{\alpha}\cos\alpha - l\dot{\beta}\sin\beta)\vec{Y} + (l\dot{\beta}\cos\beta - e\dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{Z}$

c. $-e\dot{\alpha}\cos\alpha - l\dot{\beta}\sin\beta = 0 \longrightarrow \vec{V}(C\in 6/R) = \left(l\dot{\beta}\cos\beta - e\dot{\alpha}\sin\alpha\right)\vec{Z}$

3) $\vec{V}(C\in 7/R) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}\,z(t)\vec{Z}\right)_R = \dot{z}(t)\,\vec{Z}$

4) $\vec{V}(C\in 7/R) = \vec{V}(C\in 6/R) \longrightarrow \dot{z}(t) = l\dot{\beta}\cos\beta - e\dot{\alpha}\sin\alpha$

5) $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{e}{l}\sin\alpha\right)$ *et* $\dot{\beta} = \frac{-\frac{e\dot{\alpha}}{l}\cos\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{l}\sin\alpha\right)^2}}$

$$\dot{z}(t) = -\frac{e\,\dot{\alpha}\cos\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{l}\sin\alpha\right)^2}}\,\frac{e}{l}\sin\alpha - e\,\dot{\alpha}\sin\alpha$$

D'où

$$\dot{z}(t) = -\frac{e^2\,\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{l^2-(e\sin\alpha)^2}} - e\,\dot{\alpha}\sin\alpha$$

Alors la loi d'entrée sortie du système s'écrit sous la forme :

$$\dot{z}(t) = -e\,\dot{\alpha}\sin\alpha\left(\frac{e\cos\alpha}{\sqrt{l^2-(e\sin\alpha)^2}} + 1\right)$$

FIN