Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Nabeul
Département de génie mécanique

TRAVAUX DIRIGÉS DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Calcul Vectoriel

Niveau : L1/S1

1

EXERCICE 1 :

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs associés au bipoint (A, B) et (C, D) données dans un repère orthonormé direct R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$; A(2,1,-3), B(-2,3,-1), C(-2,6,3) et D(1,2,3).

1. Construire les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Calculer le vecteur unitaire de même direction que $\overrightarrow{AB}$.
3. En déduire la projection orthogonale de $\overrightarrow{CD}$ sur $\vec{x}$.
4. Calculer l'angle formé entre les directions de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

EXERCICE 2 (Corrigé):

On considère les vecteurs : $\begin{cases} \vec{V}_1 = 2\vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \\ \vec{V}_2 = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \end{cases}$

1. Calculer $\vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ et $\vec{V}_4 = 2\vec{V}_2 - \vec{V}_1$

2. Calculer $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3.\vec{V}_4$

3. Peut-on trouver un vecteur $\vec{V}_\lambda = \lambda\vec{V}_2 - \vec{V}_1$; $\lambda \in R$ tel que $\vec{V}_3$ et $\vec{V}_\lambda$ soient perpendiculaires.

4. Calculer $\vec{V}_5 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et $\vec{V}_6 = \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_4$

5. Calculer $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$. Le produit vectoriel est-il associatif ?

EXERCICE 3 :

Soient les points B(0,3,0) ; C(5,0,0) et D(0,0,4) dans le repère orthonormé direct $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les coordonnées sont en cm.

1. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ dans ce repère.
2. Calculer la norme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et lui donner une interprétation géométrique.
3. Calculer le produit mixte $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ et lui donner une interprétation géométrique.
4. Calculer : $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD})$ noté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

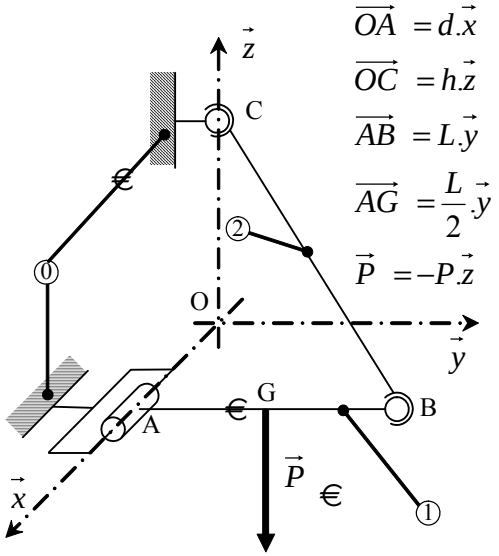
   $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB})$ noté $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$.

   Les comparer et conclure.

EXERCICE 4 (Corrigé):

Nous souhaitons amorcer l'étude de l'équilibre du **portique** représenté ci-contre.

1. Déterminez, **littéralement**, le moment $\overrightarrow{M}_A(\vec{P})$.
2. Déterminez, **littéralement**, le moment $\overrightarrow{M}_B(\vec{P})$.
3. Déterminez, **littéralement**, le moment $\overrightarrow{M}_C(\vec{P})$.
4. Déterminez, **littéralement**, le moment $\overrightarrow{M}_O(\vec{P})$.



EXERCICE 5 :

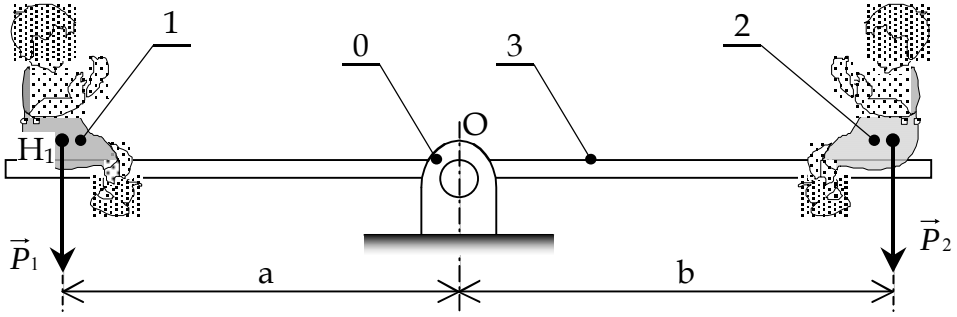
Une balançoire 3 est articulée en O (liaison pivot) sur un socle fixe 0. $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ représentent les poids respectifs des deux enfants 1 et 2, appliqués respectivement en H_1 et H_2.

On souhaite calculer les moments par rapport au point O de $\vec{P}_1$ et de $\vec{P}_2$ pour, ensuite, les comparer.

1. Déterminez **littéralement**, les moments par rapport au point O des poids $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$.

2. Déterminez **numériquement**, les moments en O des poids $\vec{P}_1$ et de $\vec{P}_2$. Vous prendrez $\|\vec{P}_1\| = 29\ \ daN$, $\|\vec{P}_2\| = 32\ \ daN$, a = 2 m et b = 1,8 m.

3. Comparez ces deux moments et concluez.

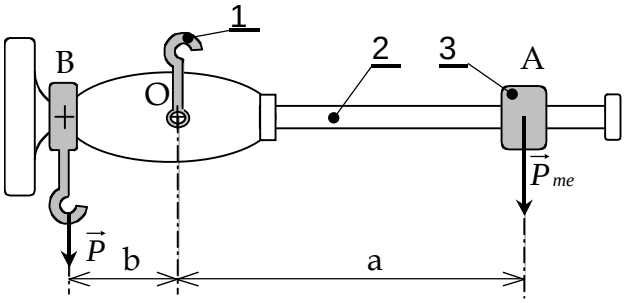


EXERCICE 6 :

Une balance romaine se compose d'un balancier 2 articulé en O sur le crochet de fixation 1, et d'une masse d'équilibrage 3 dont la position est réglable sur le balancier. La charge à peser 4 est accrochée en B. La pesée est effectuée en déplaçant la masse d'équilibrage 3.

1. En supposant que le $\overrightarrow{M}_O(\vec{P}) + \overrightarrow{M}_O(\vec{P}_{me}) = \vec{0}$, **exprimez la relation** d'équilibrage entre P et les autres paramètres du problème.

2. Déterminez, **numériquement**, le poids P mesuré. Pour ce faire, vous prendrez $\|\vec{P}_{me}\| = 5\ \ daN$, a = 700 mm et b = 100 mm. Déduisez-en la masse M de la charge accrochée.



CORRECTION

EXERCICE 2 :

$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = 3\vec{x} + 2\vec{z}$

$\vec{V}_4 = 2\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = 3\vec{y} + \vec{z}$

2. $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 2-1+1=2$

$\vec{V}_3.\vec{V}_4 = 2$

3. Calcul de $\vec{V}_\lambda$

$$\vec{V}_\lambda = \lambda\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \lambda \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 \\ \lambda + 1 \\ \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

Pour que $\vec{V}_3$ et $\vec{V}_\lambda$ soient perpendiculaires, il faut que $\vec{V}_3.\vec{V}_\lambda = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda - 2 \\ \lambda + 1 \\ \lambda - 1 \end{vmatrix} = 3(\lambda - 2) + 0 + 2(\lambda - 1) = 5\lambda - 8 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{8}{5}$$

4. $\vec{V}_5 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -2\vec{x} - \vec{y} + 3\vec{z}$

$\vec{V}_6 = \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_4 = -6\vec{x} - 3\vec{y} + 9\vec{z}$

5. $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = -\vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = -[(\vec{V}_3.\vec{V}_2).\vec{V}_1 - (\vec{V}_3.\vec{V}_1).\vec{V}_2] =$

$-[5.\vec{V}_1 - 8.\vec{V}_2]$

$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3).\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2).\vec{V}_3 = 8.\vec{V}_2 - 2.\vec{V}_3$

Conclusion : le double produit vectoriel n'est pas associatif.

EXERCICE 4 :

1. $\overrightarrow{M_A}(\vec{P}) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \frac{L}{2}\vec{y} \wedge -P\vec{z} = -\frac{PL}{2}\vec{x}$

2. $\overrightarrow{M_B}(\vec{P}) = \overrightarrow{BG} \wedge \vec{P} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}) \wedge \vec{P} = -\frac{L}{2}y \wedge -P\vec{z} = \frac{LP}{2}\vec{x}$

3.

$\overrightarrow{M_C}(\vec{P}) = \overrightarrow{CG} \wedge \vec{P} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}) \wedge \vec{P} = (-h\vec{z} + d\vec{x} + \frac{L}{2}y) \wedge -P\vec{z} = Pd\vec{y} - \frac{PL}{2}\vec{x}$

4. $\overrightarrow{M_O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}) \wedge \vec{P} = (d\vec{x} + \frac{L}{2}y) \wedge -P\vec{z} = Pd\vec{y} - \frac{PL}{2}\vec{x}$