INSTITUT SUPERIEUR DES ETUDES TECHNOLOGIQUES DE NABEUL

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

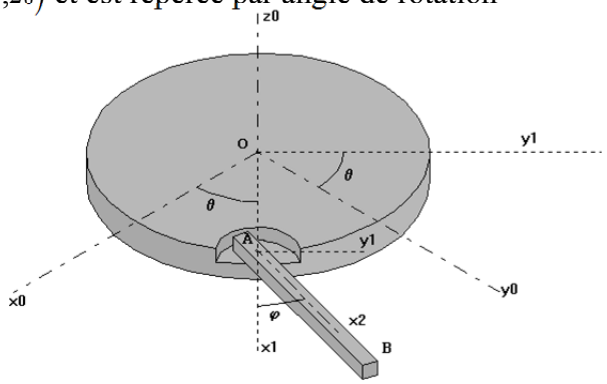
TRAVAUX DIRIGÉS DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Cinétique et Dynamique

Niveau : L1/S2

Exercice 1 :

On considère un système (S) constitué d'un disque (D) de masse M et d'une tige (T) de masse m. Le disque (D) tourne autour de l'axe $(O,\vec{z}_0)$ et est repéré par angle de rotation θ. La tige (T) lié au disque au point A tourne autour de $(A,\vec{z}_0)$ et est repérée par angle de rotation φ.



Soient les repères:

$R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$ le repère de référence lié au sol

$R_1\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1\right)$ le repère lié au disque(D)

$R_2\left(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2\right)$ le repère lié à la tige (T)

avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2$

On note:

$\alpha=\left(\vec{x}_0,\vec{x}_1\right)=\left(\vec{y}_0,\vec{y}_1\right)$; $\varphi=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)=\left(\vec{y}_1,\vec{y}_2\right)$

On pose:

$OA=R=$ constante , $AB=L=$ constante, $M=3m$ et $L=2R$

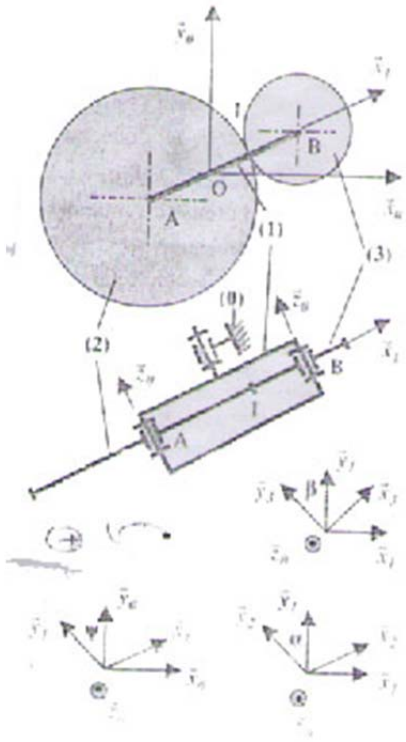
a) Déterminer le torseur cinétique de (D) au point O

b) Déterminer le torseur cinétique de (T) au point A

c) En déduire le torseur cinétique de (S) au point O

d) Déterminer l'énergie cinétique de (S)

Exercice 2 (corrigé):



Soit R_0 (O,$\overrightarrow{x_0}$,$\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$) un repère orthonormé direct supposé galiléen lié à un bâti fixe. Le système mécanique proposé (S), mobile dans R_0 , est constitué de trois solides (1), (2) et (3) et ce de la façon suivante :

- (1) est une tige rectiligne d'extrémité A et B, de longueur 3r, de masse négligeable. Le repère R_1 (O,$\overrightarrow{x_1}$,$\vec{y}_1$, $\vec{z}_1$) orthonormé direct est lié rigidement à la tige. (1) subit un mouvement de rotation autour de l'axe (O,$\vec{z}_0$). On note l'angle Ψ = ($\vec{x}_0$, $\vec{x}_1$). La liaison rotoide entre la tige (1) et le bati (0) est supposée sans frottement. On a $\overrightarrow{AO}$ = r $\vec{x}_1$, et $\overrightarrow{OB}$ = 2r$\vec{x}_1$.
- (2) est un disque homogène de masse m_2 et de rayon 2r, en liaison rotoide d'axe (A,$\vec{z}_0$) avec (1) . Le repère R_2 (O,$\overrightarrow{x_2}$,$\vec{y}_2$, $\vec{z}_2$) orthonormé direct est lié rigidement à (2). On note l'angle α = ($\vec{x}_2$, $\vec{x}_1$).
- (3) est une roue assimilée à un cerceau homogène de masse m_3 et de rayon r, en liaison rotoide d'axe (B,$\vec{z}_0$) avec (1) , le repère R_3 (B, $\overrightarrow{x_3}$,$\vec{y}_3$, $\vec{z}_0$) orthonormé direct est lié

à (3) . On note l'angle β = ($\vec{x}_1$, $\vec{x}_3$). Les liaisons entre (2) et (1) et entre (3) et (1) sont supposées sans frottement.

On appelle I, le point de contact entre (2) et (3) et on suppose dans tout le problème que le glissement en I de (3) sur (2) est nul. Le pesanteur admet pour vecteur accélération, uniforme et constant $\vec{g}$ = - g$\vec{y}_0$,

Le repère de projection est R_1

1. Tracer le graphe de liaisons du système. Identifier les liaisons correspondantes.
2. Déterminer les vecteurs rotations $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(3/1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$
3. Déterminer les vecteurs vitesses suivants : $\overrightarrow{V(A/0)}$ et $\overrightarrow{V(B/0)}$
4. Déterminer la condition de roulement sans glissement de (2) sur (3) au point I.
5. Trouver le moment d'inertie du disque et du cerceau respectivement par rapport à l'axe (A, $\vec{z}_0$) et (B, $\vec{z}_0$).
6. Déterminer , au point O , le torseur cinétique de S_1 {2,3}/R_0 .
7. Déduire le torseur dynamique , au point O, de S_1 = {2,3}/R_0 .
8. Déterminer le torseur statique de $\bar{S}$ sur S
9. Appliquer le théorème du moment dynamique à (S)/R_0, trouver une deuxième équation du mouvement
10. Déterminer l'énergie cinétique du système mécanique (S)/R_0

Exercice 3 (corrigé) :

ETUDE DYNAMIQUE D'UNE CENTRIFUGEUSE HUMAINE

Mise en situation :

L'élargissement du domaine de vol des avions de combat modernes soumet les pilotes de chasse à des niveaux d'accélération de plus en plus élevés. L'accélération ressentie par le pilote est généralement exprimée en « équivalent pesanteur » noté G, avec 1 G = 9,81 m/s^2 **figure 2**.

Dans le cadre de l'entraînement physiologique des pilotes, l'utilisation d'une centrifugeuse humaine est un moyen avantageux de recréer au niveau du sol, l'accélération subie en opération. Les **figures 1** et **3** présentent une centrifugeuse où l'on reconnaît une structure cinématique ouverte à quatre corps (support, bras, anneau et nacelle) assemblés par liaison pivot.

figure 1 – centrifugeuse humaine

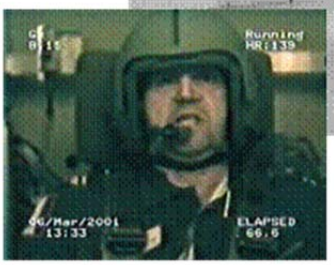


Figure 2 – pilote soumis à une accélération de 8,10 G

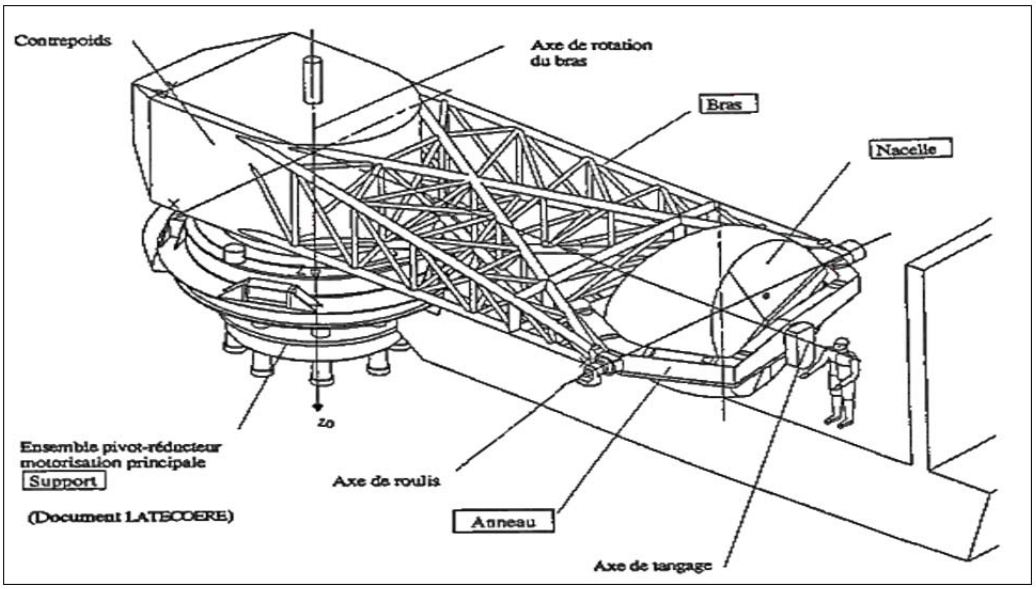


Figure 3 : les constituants de la centrifugeuse humaine.

La **figure 4** représente le modèle de la centrifugeuse retenu pour l'étude cinématique et dynamique du système qui est constitué par :

- un bras **1** de longueur $\overrightarrow{OI} = -R.\vec{y}_1$, en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ par rapport au bâti **0**. Sa position est paramétrée par l'angle ψ avec $\psi = (\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1})$ et $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$.
- un anneau **2** en liaison pivot d'axe $(I,\vec{x}_1)$ et de paramètre θ par rapport à l'axe $(I,\vec{y}_1)$ lié au bras **1**. θ est l'angle de roulis avec $\theta = (\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{z_1},\overrightarrow{z_2})$ et $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$.
- une nacelle **3** dans laquelle prend place le pilote, en liaison pivot d'axe $(I,\vec{y}_2)$ et de paramètre φ par rapport à l'axe $(I,\vec{x}_2)$ lié à l'anneau **2**. φ est l'angle de tangage avec $\varphi = (\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}) = (\overrightarrow{z_2},\overrightarrow{z_3})$ et $\overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_3}$.

L'actionneur de tangage est essentiellement dimensionné par les couples qu'il doit fournir durant les phases d'accélération du bras. La vitesse du bras sera considérée comme variable.

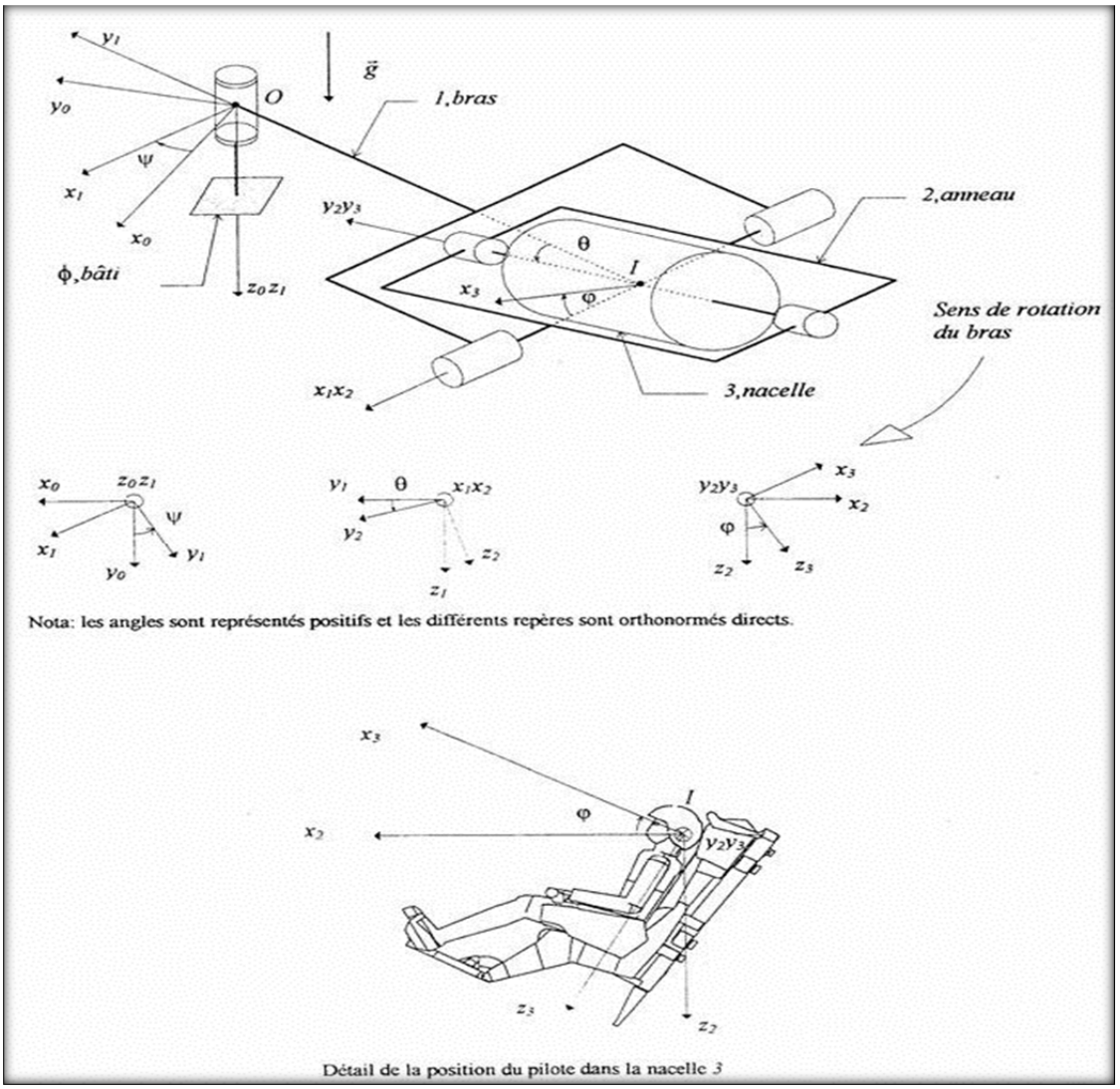


Figure 4 : modélisation de la centrifugeuse retenu pour l'étude cinématique et dynamique.

- Soit $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ un repère absolu lié au bâti **0**.
- Soit $R_1(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ un repère mobile au bras **1**.
- Soit $R_2(I, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ un repère mobile lié à l'anneau **2**.
- Soit $R_3(I, \vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ un repère mobile lié à la nacelle **3**.

Approche cinématique

1. Déterminer les vecteurs instantanés de rotation des mouvements relatifs $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$, et $\vec{\Omega}(R_3/R_2)$. En déduire alors $\vec{\Omega}(R_3/R_0)$.
2. Calculer le vecteur $\vec{V}(I \in 3/R_0)$ du point I dans le mouvement de **3** par rapport à **0**.
3. Calculer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(I \in 3/R_0)$ en projection dans la base $R_1(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.

Approche dynamique

Soit $\left[I_{(3)}\right]_I = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix}_{(I,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$ la matrice d'inertie du solide **3** en I dans $R_2(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$.

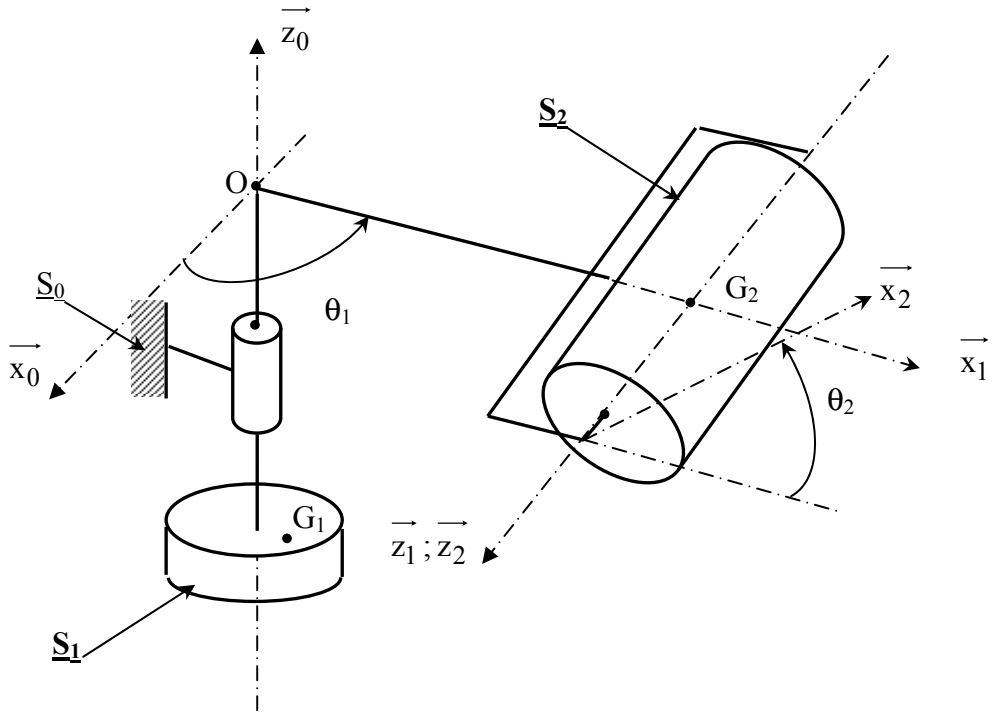
Le solide **3** de masse ***m*** a son centre d'inertie en I.

- Soit $\left\{\tau_{(2/3)}\right\}_I = \begin{Bmatrix} X_{2/3} & L_{2/3} \\ Y_{2/3} & 0 \\ Z_{2/3} & N_{2/3} \end{Bmatrix}_{(I,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$ le torseur des efforts de liaison entre **2** et **3** en I dans la base $R_2(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$.
- Soit $\left\{\tau_{(m/3)}\right\}_I = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{23} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(I,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$ avec C_{23} le couple suivant l'axe $(I,\vec{y}_3)$ fourni à la nacelle **3** par le moteur d'asservissement monté sur l'anneau **2**, telle que $\vec{C}_{23} = C_{23}.\overrightarrow{y_3}$
- $\{\tau(pes/3)\}_I = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ mg\sin\theta & 0 \\ mg\cos\theta & 0 \end{Bmatrix}_I$

4. Calculer la résultante cinétique $\vec{R}_C(3/R_0)$ de la nacelle **3** dans son mouvement par rapport au bâti.
5. Etant donné que I est le centre de gravité de la nacelle **3**, calculer son moment cinétique $\vec{\sigma}_I(3/R_0)$ dans son mouvement par rapport au bâti.Exprimer dans R_2
6. Donner alors le torseur cinétique $\left\{C_{(3/R_0)}\right\}_I$ en I de la nacelle **3** dans son mouvement par rapport au bâti. Les éléments de réduction du torseur seront exprimés dans $R_2(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$.
7. Calculer la résultante dynamique $\vec{R}_d(3/R_0)$ de la nacelle **3** dans son mouvement par rapport au bâti. Exprimer dans R_2 cette résultante
8. Etant donné que I est le centre de gravité de la nacelle **3**, calculé son moment dynamique $\vec{\delta}_I(3/R_0)$ dans son mouvement par rapport au bâti.
9. Donner alors le torseur dynamqie $\left\{D_{(3/R_0)}\right\}_I$ en I de la nacelle **3** dans son mouvement par rapport au bâti. Les éléments de réduction du torseur seront exprimés dans $R_2(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$.
10. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide **3** dans son mouvement par rapport au bâti. Ecrire les équations en projection sur $R_2(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ et déterminer l'expression du couple moteur C_{23}.

Exercice 4 Corrigé):

On considère une centrifugeuse d'entraînement physiologique des pilotes de chasse représenté par son schéma cinématique suivant :



Un moteur (non représenté) entraîne le solide $\mathbf{S_1}$ de masse $\mathbf{m_1}$ en rotation autour de son axe $\vec{z_0}$. Un deuxième moteur (non représenté) entraîne le solide $\mathbf{S_2}$ de masse $\mathbf{m_2}$ (avec le pilote embarqué) en rotation autour de son axe $\vec{z_2}$

$\boldsymbol{\theta_1}$ et $\boldsymbol{\theta_2}$ étant deux paramètres de position angulaire des solides respectifs $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$.

Pour l'étude suivante, on donne :

$R_o\,(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ repère lié au bati S_0 .

$R_1\,(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ repère lié au solide S_1 .

$R_2\,(G_2, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ repère lié au solide S_2 .

$\overrightarrow{OG_2} = l.\vec{x_1}$; $\overrightarrow{OG_1} = \frac{l}{2}.\vec{x_1}$

$$[I(S_1)]_{O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [I(S_2)]_{G_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2}=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \; A_2=C_2$$

On demande de :

1°/ Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_{G1}(S_1/R_0)}$ et l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G1}(S_1/R_0)}$.

2°/ Ecrire le torseur cinétique ainsi que celui le torseur dynamique du solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0.

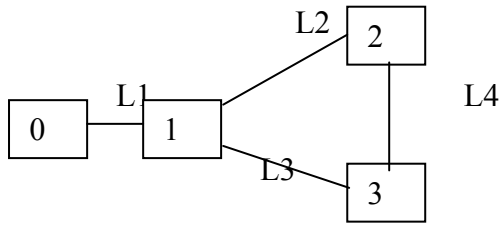
3°/ Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_{G2}(S_2/R_0)}$ et l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G2}(S_2/R_0)}$.

4°/ Ecrire le torseur cinétique ainsi que celui le torseur dynamique du solide S_2 dans son mouvement par rapport à R_0.

CORRECTION

Exercice 2 :

1) Etablissement du graphe de liaisons du système et identification des liaisons

Graphe de liaison	Identification des liaisons
	L1 : pivot d'axe $(O,\overrightarrow{zo})$ L2 : pivot d'axe $(A,\overrightarrow{zo})$ L3 : pivot d'axe $(B,\overrightarrow{zo})$ L4 : linéique rectiligne de direction$(I,\overrightarrow{zo})$

2)

$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\right) = \dot{\Psi}\,\overrightarrow{z_0}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}\right) = -\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{2/0}) = \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{2/1}) + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{1/0}) = \left(-\dot{\alpha} + \dot{\Psi}\right)\overrightarrow{z_0}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{3/1}) = \dot{\beta}\overrightarrow{z_0}$

$\vec{\Omega}\left(\frac{3}{0}\right) = (3/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \left(\dot{\beta} + \dot{\Psi}\right)\overrightarrow{z_0}$

3) $\overrightarrow{V}(A/0) = \left(\frac{d}{dt}\,(\overrightarrow{OA})\right)R_0 = \left(\frac{d}{dt}\,(-r\overrightarrow{x_1})\right)R_0 = -\,r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{V}(B/0) = \left(\frac{d}{dt}\,(\overrightarrow{OB})\right)R_0 = \left(\frac{d}{dt}\,(2r\overrightarrow{x_1})\right) = 2r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1}$

4) $\vec{V}(I \in 2/3) = \vec{o} \Rightarrow \vec{V}(I \in 2/10) - \vec{V}(I \in 3/0) = \vec{0}$

$\vec{V}(I \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \Lambda \overrightarrow{AI}$

$= (-r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1}) + (-\dot{\alpha} + \dot{\Psi})\,\overrightarrow{y_0} \Lambda\, (2r\vec{x}_1)$

$\Rightarrow \vec{V}(I \in 2/0) = -r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1} + 2r\,(\dot{\Psi} - \dot{\alpha})\,\overrightarrow{y_1}$

$\Rightarrow \vec{V}(I \in 2/0) = r(\dot{\Psi} - 2\dot{\alpha})\,\overrightarrow{y_1}$

$\Rightarrow \vec{V}(I \in 3/0) = \vec{V}(B \in 3/0) + \overrightarrow{\Omega}(3/0) \Lambda \overrightarrow{BI}$

$\Rightarrow \vec{V}(I \in 3/0) = 2r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1} + (\dot{\beta} + \dot{\Psi})\,\overrightarrow{z_0} \Lambda\, (-r\overrightarrow{x_1})$

$\Rightarrow \vec{V}(I \in 3/0) = 2r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1} - r\,(\dot{\beta} + \dot{\Psi})\,\overrightarrow{y_1} = r\,(\dot{\Psi} - \dot{\beta})\,\overrightarrow{y_1}$

D'où :

$\vec{V}(I \in 2/0) - \vec{V}(I \in 3/0) = \vec{0} \leftrightarrow r\,(\dot{\Psi} - 2\dot{\alpha}) = r\,(\dot{\Psi} - \dot{\beta}) \leftrightarrow \mathbf{2\dot{\alpha} = \dot{\beta}}$ ***(première equation)***

5/ $I_{A,\vec{z}_0} = 2m_2r^2$

$$[I_{A(2)}]_{B2} = \begin{bmatrix} \frac{m_2(2r)^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2(2r)^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2(2r)^2}{4} \end{bmatrix} B2$$

$$= \begin{bmatrix} m_2r^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2r^2 \end{bmatrix} B2$$

$$I_{A,\vec{z}_0}(3) = \frac{m_3r^2}{2}$$

$$[I_B(3)]_{B3} = \begin{bmatrix} \frac{m_2r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3r^2}{4} \end{bmatrix} B3$$

6) Le torseur cinétique de S1 = {2,3}/Ro au point O

$$\{C(s_{1/0}\}^O = \{C(2_{/0}\}^O + \{C(3_{/0}\}^O$$

Remarque :

Si E = $\sum_{i=1}^{n} Si$

$\{C(E/Ro)\}^A = \sum_i^n \{C(si/R_0)\}^A$

$M\vec{V}(G/RO) = \sum_{i=1}^{n} M_i\vec{V}(\frac{Gi}{Ro})$

$\Rightarrow \vec{\sigma}_A\left(\frac{E}{R0}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\sigma}_A(si/Ro)$

$$\{C(2/0)\}^O = \begin{Bmatrix} m_2\overrightarrow{V}(A/0) \\ \overrightarrow{\sigma_A}(2/0) \end{Bmatrix}^O$$

$m_2\vec{V}(A/O) = -m_2r\,\dot{\Psi}\,\overrightarrow{y_1}$

$\vec{\sigma}_O(2/0) = \vec{\sigma}_A(2/0) + m_2\vec{V}(A/O) \wedge \overrightarrow{OA}$

$\vec{\sigma}_A(2/0) = [I_2(2)]B_2 \,.\, [\vec{\Omega}(2/0)]\,B_2$

$$= \begin{bmatrix} m_2r^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2r^2 \end{bmatrix} B_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\alpha} + \dot{\Psi} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{\sigma}_A(2/0) = m_2r^2\,(\dot{\Psi} - \dot{\alpha})\,\overrightarrow{z_0}$

$m_2\,\vec{V}(A/0)\wedge\overrightarrow{AO} = -m_2 r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1}\,\Lambda\,r\overrightarrow{x_1} = m_2 r^2\dot{\Psi}\overrightarrow{z_0}$

D'où $\vec{\sigma}_O(2/0) = 2m_2r^2(-\dot{\alpha}+\dot{\Psi})\,\overrightarrow{z_0} + m_2r^2\,\dot{\Psi}\,\overrightarrow{z_0}$

$\vec{\sigma}_O(2/0) = m_2r^2(3\dot{\Psi}-2\dot{\propto})\,\overrightarrow{z_0}$

D'où $\{C2/20)\}^{O}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ -m_2r\dot{\Psi} & 0 & \\ 0 & m_2r^2\,(3\dot{\Psi}-2\dot{\alpha}) & \end{bmatrix}^{O}_{R_1}$

$\{C(3/R_0)\}^0 = \begin{Bmatrix} m_3\vec{V}(B/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(3/R_0) \end{Bmatrix}$

$m_3\vec{V}(B/R_0) = 2m_3\,r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1}$

$\vec{\sigma}_O(3/Ro) = \vec{\sigma}_B(3/Ro) + m_3\,\vec{V}(B/RO)\,\Lambda\,\overrightarrow{BO}$

$\vec{\sigma}_B(3/Ro) = [I_B(3)]_{B3}\ .\ (\Omega(3/0))_{B3}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{m_3r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3r^2}{4} \end{bmatrix} B_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta}+\dot{\Psi} \end{pmatrix} B_3$$

$\Rightarrow\vec{\sigma}_B(3/Ro) = \frac{m_3r^2}{2}(\dot{\Psi}+\dot{\beta})\,\overrightarrow{z_0}$

$m_3\,\vec{V}(B/RO)\,\Lambda\,\overrightarrow{BO} = 2m_3\,r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1}\ \Lambda\,(-2r\vec{x}_1) = 4m_3r^2\dot{\Psi}\overrightarrow{z_0}$

$\Rightarrow\vec{\sigma}_B(3/Ro) = \frac{m_3r^2}{2}(\dot{\Psi}+\dot{\beta})\,\overrightarrow{z_0} + 4\,m_3\,r^2\,\dot{\Psi}\overrightarrow{z_0}$

$= \frac{m_3r^2}{2}(9\dot{\Psi}+\dot{\beta})\,\overrightarrow{z_0}$

D'où :

$$\{C(3/Ro)\}_{O,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \\ 2m_3r\dot{\Psi} & 0 & \\ 0 & \frac{m_3r^2}{2}(9\dot{\Psi}+\dot{\beta}) & \end{Bmatrix} O,R_1$$

D'où :

$$\{C(S_1/Ro)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \\ 2m_3r\dot{\Psi} - m_2r\dot{\Psi} & 0 & \\ 0 & m_2r^2\,(3\dot{\Psi}-2\dot{\alpha}) + \frac{m_3r^2}{2}(9\dot{\Psi}+\dot{\beta}) & \end{Bmatrix} O,R_1$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ r\dot{\Psi}(2\,m_3 - m_2) & 0 \\ 0 & m_2 r^2\left(3\dot{\Psi} - 2\dot{\alpha}\right) + \frac{m_3 r^2}{2}(9\dot{\Psi} + \dot{\beta} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta \\ \\ R_1 \end{matrix}$$

07) Le torseur dynamique, au point θ, de S1 = {2,3}/RO

Remarque :

Pour E = $\sum_{i=1}^{n} S_i$

$\{D(E/Ro)\}^A = \sum_{i=1}^{n}\{D(si/RO)\}^A$

$$\begin{Bmatrix} M\vec{\Gamma}\left(\frac{G}{RO}\right) \\ \vec{\delta}_A(E/R_O) \end{Bmatrix}_A \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Mi\vec{\Gamma}(Gi/RO) \\ \sum_{i=1}^{n} \vec{\delta}_A(Si/RO) \end{Bmatrix}$$

$\{D\ (S1/Ro\}^0 = \{D(2/RO)\}^0 + \{D(3/RO)\}^0$

$$\{D(2/RO)\}^0 = \begin{Bmatrix} m_2\overrightarrow{\Gamma}(A/RO) \\ \vec{\delta}_O(2/R_O) \end{Bmatrix} O$$

$m_2\overrightarrow{\Gamma}(A/RO) = m_2\left(\frac{d}{dt}\,\vec{V}(A/RO)\right)_{RO}$

$= m_2\left(\frac{d}{dt}\,(-r\dot{\Psi}\overrightarrow{y_1}\right)_{RO}$

$= -\,m_2 r\ddot{\Psi}\overrightarrow{y_1} - m_2 r\dot{\Psi}\,(-\dot{\Psi}\vec{x}_1)$

$= -\,m_2 r\ddot{\Psi}\overrightarrow{y_1} + m_2 r\dot{\Psi}^2\,\vec{x}_1 = r m_2(\dot{\Psi}^2\vec{x}_1 - \ddot{\Psi}\overrightarrow{y_1})$

$\vec{\delta}_O(2/Ro) = \left(\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_O(2/Ro)\right)_{Ro} + m_2\vec{V}(O/RO) \wedge \vec{V}(A/RO)$

$= \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_O\left(\frac{2}{RO}\right)\right)_{Ro}$

$= m_2 r^2\,(3\ddot{\Psi} - 2\ddot{\alpha})\,\overrightarrow{y_0}$

D'où $\{D\ (2/RO)\}_{R_1}^{\theta} = = \begin{Bmatrix} m_2 r\dot{\Psi}^2 & 0 \\ -m_2 r\ddot{\Psi} & 0 \\ 0 & m_2 r^2\left(3\dot{\Psi} - 2\dot{\alpha}\right) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta \\ \\ R_1 \end{matrix}$

$$\{D\ (3/RO)\}_{O,R_1} = \begin{Bmatrix} m_3\vec{\Gamma}\left(\frac{B}{RO}\right) \\ \vec{\delta}_O\ (3/RO) \end{Bmatrix} O$$

$m_3\vec{\Gamma}(B/RO) = m_3\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{V}(B/RO)_{RO} = m_3\left(\frac{d}{dt}(2r\dot{\Psi}\vec{y}_1)_{RO} = 2rm_3\,(\ddot{\Psi}\overrightarrow{y_1} - \dot{\Psi}^2\vec{x}_1\right)\right)$

$\overrightarrow{\sigma_o}\,(3/RO) = \left(\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\sigma_0}(3/RO)\right)_{RO} + m_3\vec{V}(O/Ro) \wedge \vec{V}\,(B/RO)$

$= (\frac{d}{dt}\ \overrightarrow{\sigma_0}(3/RO)_{\ RO}$

$= (\frac{d}{dt}(\frac{m_3 r^2}{2}\ (9\dot{\Psi} + \dot{\beta})\vec{z}_0)_{Ro}$

$= \frac{m_3 r^2}{2}\ (9\dot{\Psi} + \dot{\beta})\vec{z}_0$

D'où

$$\{D\ (3/RO\}^{O}_{R_1} = \begin{Bmatrix} -2rm_3\dot{\psi}^2 & 0 \\ 2rm_3\dot{\Psi} & 0 \\ 0 & \frac{m_3 r^2}{2}\ (9\dot{\Psi} + \dot{\beta}) \end{Bmatrix}_{R_1}^{O}$$

$$\{D\ (S1/RO\}^{O}_{R_1} = \begin{Bmatrix} r\Psi^2(m_2 - 2m_3) & 0 \\ r\dot{\Psi}(-m_2 + 2m_3) & 0 \\ 0 & \frac{m_3 r^2}{2}\ (9\dot{\Psi} + \dot{\beta}) + m_2 r^2(3\dot{\Psi} - 2\dot{\alpha}) \end{Bmatrix}_{R_1}^{O}$$

D'où

$$\{D\ (S1/RO\}^{O}_{R_1} =$$

$$\begin{Bmatrix} r\dot{\Psi}^2(m_2 - 2m_3)us\Psi - r\ddot{\Psi}(2m_3 - m_2)sin\Psi & 0 \\ r\dot{\Psi}^2(m_2 - 2m_3)sin\Psi - r\ddot{\Psi}(2m_3 - m_2)cos\Psi & 0 \\ 0 & \frac{m_3 r^2}{2}\left(9\dot{\Psi} + \ddot{\beta}\right) + m_2 r^2\ (3\dot{\Psi} - 2\ddot{\alpha}) \end{Bmatrix}_{R_0}^{O}$$

8) Le torseur statique de $\overline{\mathbf{S}}$ sur S

- ✓ bilan des actions mécaniques appliquées sur S
- ✓ Le poids de (2) tel que $\overrightarrow{P_2} = -m_2\ g\ \vec{y}_0$
- ✓ Le poids de (3) tel que $\overrightarrow{P_3} = -m_3\ g\ \vec{y}_0$
- ✓ L'action mécanique due à (0) – (S)

$$\overline{\mathbf{S}} = \{\overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, 0\}$$

- Torseurs associés aux actions mécaniques en leur point d'application.
- $\{\tau_s\ (\overrightarrow{P_2} \rightarrow S)\}_{A,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_0}$
- $\{\tau_s\ (\overrightarrow{P_3} \rightarrow S)\}_{B,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_3 g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_0}$
- $\{\tau_s\ (0 \rightarrow S)\}_{O,R_0} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{O,R_0}^{R_0}$

- Torseur statique ($\overline{S} \rightarrow S$) au point O et dans la base B.

  $\{\tau_s\ (\overrightarrow{P_2} \rightarrow S)\}_{A \rightarrow O}$

  $M_0(\overrightarrow{P_2}) = \overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{P_2}) + \overrightarrow{P_2} \Lambda\ A\overrightarrow{O} = \overrightarrow{0} + (-m_2 g\vec{y}_0) \Lambda\ r\vec{x}_1$

  $= (-m_2 g\vec{y}_0) \Lambda\ r\ (\cos\Psi\vec{x}_0 + \sin\Psi\vec{y}_0)$

  $= r m_2 g \cos\Psi \vec{z}_0)$

  D'où :

- $\{\vec{\tau}_5\ (\overrightarrow{P_3} \rightarrow S)\}_{B \rightarrow \theta}^{R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 g & 0 \\ 0 & r\, m_2 g \cos\Psi \end{Bmatrix}_B^{R_0}$

- $\{\vec{\tau}_5\ (\overrightarrow{P_3} \rightarrow S)\}_{B \rightarrow \theta}^{R_0}$

  $\overrightarrow{M_O}\ (\overrightarrow{P_3}) = \overrightarrow{M_B}\ (\overrightarrow{P_3}) + \overrightarrow{P_3} \Lambda\ \overrightarrow{BO}$

  $= \overrightarrow{0} + -m_3 g\ \overrightarrow{y_0} \Lambda\ (-2r\vec{x}_1)$

  $= -m_3 g\ \overrightarrow{y_0}\ (-2r\ (\cos\Psi\overrightarrow{xo} + \sin\Psi\ \overrightarrow{y_0}))$

  $= -2r\ m_3 g \cos\Psi\overrightarrow{z_0}$

- D'où $\{\vec{\tau}_5\ (\overrightarrow{P_3} \rightarrow S)\}_{\theta}^{R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_3 g & 0 \\ 0 & 2r m_3 g \cos\Psi \end{Bmatrix}_{\theta}^{R_0}$

- D'où : $\{\vec{\tau}_s\ (\overline{S} \rightarrow S)\}_{O, R_0} = \begin{Bmatrix} X & L \\ y - m_2 g - m_3 g & M \\ Z & rm_2 g \cos\Psi - 2rm_3 g\cos\Psi \end{Bmatrix}_{O, R_0}$

9) application du PFD à $(S)/R_0$

$\{\tau_s\ (\overline{S} \rightarrow S)\}_{0, R_0} = \{D(S/Ro)\}_{0, R_0} = \{D(S1/Ro)\}_{0, R_0}$

Car la masse de la tige (1) est négligeable ainsi on obtient un système de 6 équations.

$X = r\dot{\Psi}^2 (m_2 - 2m_3)\cos\Psi - r\ddot{\Psi}(2m_3 - m_2)\sin\Psi$. (1)

$Y = -m_2 g - m_3 g = r\dot{\Psi}^2 (m_2 - 2m_3)\sin\Psi + r\ddot{\Psi}(2m_3 - m_2)\cos\Psi$ (2)

$Z = 0$ (3)

$L = 0$ (4)

$M = 0$ (5)

$\frac{m_3 r^2}{2}(9\ddot{\Psi} + \ddot{\beta}) + m_2 r^2 (3\ddot{\Psi} - 2\ddot{\alpha}) = r\, m_2 g \cos\Psi - 2r\, m_3 g \cos\Psi$ (6)

L'équation du mouvement est l'équation ne continuant pas d'inconnues statiques :

$\Rightarrow \frac{m_3 r^2}{2}(9\ddot{\Psi} + \ddot{\beta}) + m_2 r^2 (3\ddot{\Psi} - 2\ddot{\alpha}) = (m_2 - 2m_3)\, rg\cos\Psi$.

10) Détermination de l'énergie cinétique du système mécanique (S)/R_0

Remarque : S = {1 ... ... n}

$$\boldsymbol{2E_C(S/R_0) = \sum_{i=1}^{n} (\{V\,(Si/Ro)\}^{Ai}_{B}\ \{C\,(si/Ro)\}^{Ai}_{B}}$$

$$E_C(S/R_0) = E_C(2/R_0) + E_C(3/R_0)$$

$$E_C(2/R_0) = \frac{1}{2}\{V\ (2/RO)\}^{A}_{B1}\ \{C\,(2/RO)\}^{A}_{B1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r\dot{\psi} \\ (-\dot{\alpha} + \dot{\Psi}) & 0 \end{Bmatrix}^{A}_{B1} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 r\dot{\Psi} & 0 \\ 0 & m_2 r^2(-\dot{\alpha} + \dot{\Psi}) \end{Bmatrix}^{A}_{B_1}$$

$$= \frac{1}{2} 2m_2 r^2(-\dot{\alpha} + \dot{\Psi})^2 + \frac{m_2}{2} r^2\dot{\Psi}^2$$

$$= m_2 r^2(-\dot{\alpha} + \dot{\Psi})^2 + \frac{m_2}{2} r^2\dot{\Psi}^2$$

$$= \frac{m_2}{2} r^2 \left[2\left(\dot{\Psi} - \dot{\alpha}\right)^2 + \dot{\Psi}^2\right]$$

$$\text{Ec (3/RO)} = \frac{1}{2}\{V\ (3/RO)\}^{A}_{B1}.\{C\,(3/RO)\}^{B}_{B1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2r\dot{\Psi} \\ (\dot{\beta} + \dot{\Psi}) & 0 \end{Bmatrix}_{B1}^{B} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2m_3 r\dot{\Psi} & 0 \\ 0 & \frac{m_3}{2} r^2(\dot{\Psi} + \dot{\beta}) \end{Bmatrix}_{B_1}^{B}$$

Ec (3/RO) = $\frac{1}{4} m_3 r^2 (\dot{\beta} + \dot{\Psi})^2 + 2m_3 r^2 \dot{\Psi}^2 = \frac{m_3 r^2}{4}\left[(\dot{\beta} + \dot{\Psi})^2 + 8\dot{\Psi}\right]$

D'où EC (S/RO) = $\frac{m_2 r^2}{2}\left[2(\dot{\Psi} - \dot{\alpha})^2 + \dot{\Psi}^2\right] + \frac{m_3 r^2}{4}\left[(\dot{\beta} + \dot{\Psi})^2 + 8\dot{\Psi}^2\right]$

$$\{\vec{\tau}_s (\overline{S} \to D)\}_{I}^{R_1} = \begin{Bmatrix} -NI & 0 \\ TI & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I}^{R_1}$$

Transfert des torseurs statiques au point C

$$\{\tau_s (S \to D)\}_{I \to c}^{R_1}$$

On a $\overrightarrow{MC}(\vec{R}) = \overrightarrow{M_I}(\vec{R}) + \overrightarrow{CI} \Lambda \vec{R}$

$$= \vec{O} + \begin{pmatrix} L/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} -NI \\ TI \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ TI/L3 \end{pmatrix}$$

On a $\overrightarrow{RI} = -N_1\overrightarrow{x_1} + T_I\overrightarrow{y_1} = -N_I(\cos\theta\, \vec{x}_0 + \sin\theta\, \vec{y}_O) + T_i(\cos\theta\, \vec{y}_O - \sin\theta\, \vec{x}_O)$

D'où :

$$\{\tau s (S \to D)\}_{c}^{R_o} = \begin{Bmatrix} (-N_I \cos O - T_I \sin\theta) & 0 \\ (-N_I \cos O - T_I \cos\theta) & 0 \\ 0 & T_I L/3 \end{Bmatrix}$$

Le torseur statique $(\overline{D} \to D)$au point C et dans la base b_0

$$\{\tau_s (\overline{D} \to D)\}_{c}^{R_o} = \{\tau_s (\overrightarrow{P_2} \to D)\}_{c}^{R_o} + \{\tau_s (T \to D)\}_{c}^{R_o} + \{\tau_s (S \to D)\}_{c}^{R_o} = \left\{\begin{matrix} 9mg \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{C}$$

$$+\begin{Bmatrix} -XDT & -LDT \\ -YDT & -MDT \\ -ZDT & 0 \end{Bmatrix}_C + \begin{pmatrix} (-NI\cos\theta - TI\sin\theta) & 0 \\ (-NI\cos\theta - TI\sin\theta) & 0 \\ 0 & TI\ L/3 \end{pmatrix} \text{c}$$

D'où

$$\{\vec{\tau}_s\ (\overline{D} \to D)\}_c^{R_o} = \begin{Bmatrix} 9mg - XDT - NI\cos\theta - TI\sin\theta - LDT & 0 \\ -YDT - NI\sin\theta + TI\cos\theta & -MDT \\ -ZDT & T_I L/3 \end{Bmatrix}_C^{RO}$$

$$\{\vec{\tau}_s\ (\overline{D} \to D)\}_c^{R_o} = \{D\ (D/RO)\}_C^{RO}$$

D'où on obtient le système d'équations suivants :

- $9mg - XDT - NI\cos\theta + TI\sin\theta = -9m\ (L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta)$
- $YDT - NI\sin\theta + Ti\cos\theta = 9m\ (L\ddot{\theta}\cos\theta + L\dot{\theta}^2\sin\theta)$
- $ZDT = 0$
- $LDT = 0$
- $MDT = 0$
- $TI\ L/3 = \frac{mL^2}{2}(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})$

14) L'équation de roulement sans glissement de (D) sur (S)

$\overrightarrow{V}(I \in D/S) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(I \in D/RO) - \vec{V}(I \in D/RO) = \vec{0}$

$on\ a\ \vec{V}(I \in D/RO) = L\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{y_1} + (\dot{\theta} + \vec{c}\ )\ \overrightarrow{z_1} \wedge (L/3\ \overrightarrow{x_1})$

$d'ou\ \vec{V}(I \in D/RO) = (L\ \dot{\theta} + L/3\ (\dot{\theta} + \dot{\varphi}\ )\ \overrightarrow{y_1}$

$\vec{V}(I \in D/RO) = \vec{0}$

D'où $\vec{V}(I \in D/S) = \vec{0} \Rightarrow L\ \dot{\theta} + \frac{L}{3}(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow 4\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} = 0$

Exercice 3 :

1) $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\vec{z_o} = \dot{\psi}\vec{z_1}$

$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta}\vec{x_1} = \dot{\theta}\vec{x_2}$

$\vec{\Omega}(R_3/R_2) = \dot{\varphi}\vec{y_2} = \dot{\varphi}\vec{y_3}$

D'où

$\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\vec{z_o} + \dot{\theta}\vec{x_1}$

$\vec{\Omega}(R_3/R_0) = \vec{\Omega}(R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_0) = \dot{\varphi}\vec{y_2} + \dot{\psi}\vec{z_o} + \dot{\theta}\vec{x_1}$

2) $\vec{V}(I \in 3/R_0) = \left(\frac{d}{dt}\vec{OI}\right)_{R_0}$

$$= \left(\frac{d}{dt}(-R\vec{y_1})\right)_{R_0}$$

$$= -R\left(\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right)_{R_0} = -R\left(\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{y_1}$$

$$= -R(\vec{O} + \dot{\psi}\vec{z_1} \wedge \vec{y_1}) = R\dot{\psi}\vec{x_1}$$

D'où

$$\boxed{\vec{V}(I \in 3/R_0) = R\dot{\psi}\vec{x_1}}$$

3) $\vec{\Gamma}(I \in 3/R_0) = \left(\frac{d}{dt}\vec{V}(I \in 3/R_0)\right)_{R_0}$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left(R\dot{\psi}\vec{x}\right)\right)_{R_0}$$

$$= R\ddot{\psi}\vec{x_1} + R\dot{\psi}\left(\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_{R_0}$$

$\vec{\Gamma}(I \in 3/R_0) = R\ddot{\psi}\vec{x_1} + R\dot{\psi}^2\vec{y_1}$

d'ou

$$\boxed{\vec{\Gamma}(I \in 3/R_0) = R\ddot{\psi}\vec{x_1} + R\dot{\psi}\,\vec{y_1}}$$

Etude dynamique

4) $\vec{Rc}(3/R_0) = m\vec{V}(I/R_0)$

$$\boxed{\vec{Rc}(3/R_0) = R\dot{\psi}\vec{x_2}}$$

$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2} \Rightarrow$ Tapez une équation ici.

5)

$$\vec{\sigma} I(3/R_0) = [I(3)]_{(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}(\vec{\Omega}(3/R_0))_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$$

$$avec\ :\ \vec{\Omega}(3/R_0) = \dot{\varphi}\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$$

$$= \dot{\varphi}\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}$$

$$avec \quad \overrightarrow{z_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{z_2} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_2}$$

$$d'ou\ \ \vec{\Omega}(3/R_0) = \dot{\varphi}\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}(\cos\theta\,\overrightarrow{z_2} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_2}) + \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}$$

$$\Rightarrow\ \vec{\Omega}(3/R_0) = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta)\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2}$$

$$\vec{\sigma}_{I(3/R_0)=}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= A\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} + B(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta)\,\overrightarrow{y_2} + A\dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{I(3/R_0)=} A\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} + B(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta)\,\overrightarrow{y_2} + A\dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2}}$$

6) $$\{C(3/R_o)\}_I = \begin{Bmatrix} mR\dot{\psi} & A\dot{\theta} \\ 0 & B(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta) \\ 0 & A\dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix}_{(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$$

7) $$\overrightarrow{Rd}_{(3/R_0)} = m\vec{\Gamma}(I \in 3/R_0)$$

$$= m(R\ddot{\psi}\overrightarrow{x_1} + R\dot{\psi}^2\overrightarrow{y_1})$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{Rd}_{(3/R_0)} = mR\ddot{\psi}\overrightarrow{x_1} + mR\dot{\psi}^2\overrightarrow{y_1}$$

Avec :

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$$

$$\overrightarrow{y_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{y_2} - \sin\theta\,\overrightarrow{z_2}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{Rd}_{(3/R_0)} = mR\ddot{\psi}\overrightarrow{x_1} + mR\dot{\psi}^2(\cos\theta\,\overrightarrow{y_2} - \sin\theta\,\overrightarrow{z_2})$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{Rd}_{(3/R_0)} = mR\ddot{\psi}\overrightarrow{x_1} + mR\dot{\psi}^2\cos\theta\,\overrightarrow{y_2} - mR\dot{\psi}^2\sin\theta\,\overrightarrow{z_2}}$$

8) $\vec{\delta} I(3/R_0) = (\frac{d}{dt}\vec{\sigma} I(3/R_0))_{R_0}$

$$\vec{\delta} I(3/R_0) = (\frac{d}{dt}(A\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} + B(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta)\overrightarrow{y_2} + A\dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2}))_{R_0}$$

D'où

$$\vec{\delta} I(3/R_0) = A\ddot{\theta}\overrightarrow{x_2} + A\dot{\theta}(\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt})_{R_0} + B(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta)\overrightarrow{y_2}$$
$$+ B(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta)\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt})_{R_0} + A\ddot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2} - A\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{z_2}$$
$$+ A\dot{\psi}\cos\theta\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt})_{R_0}$$

Avec

$$\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt})_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt})_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{x_2}$$
$$= \vec{0} + (\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} + \dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2}) \wedge \overrightarrow{x_2}$$
$$= -\dot{\psi}\sin\theta\,\overrightarrow{z_2} + \dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{y_2}$$

$$\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2} + \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2} + \dot{\psi}(\cos\theta\,\overrightarrow{z_2} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_2})$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(R_2/R_0) = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2} + \dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2}$$

$$\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt})_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt})_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{y_2}$$
$$= \vec{0} + (\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} + \dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2}) \wedge \overrightarrow{y_2}$$
$$= \dot{\theta}\overrightarrow{z_2} - \dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{x_1}$$

$$\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt})_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt})_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{z_2}$$
$$= \vec{0} + (\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} + \dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2}) \wedge \overrightarrow{z_2}$$
$$= \dot{\theta}\overrightarrow{y_2} - \dot{\psi}\sin\theta\,\overrightarrow{x_2}$$

D'où

$$\vec{\delta}I(3/R_0) = A\ddot{\theta}\overrightarrow{x_2} + A\dot{\theta}(-\dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{z_2} + \dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{y_2}) + B(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta)\overrightarrow{y_2} + B(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta)(\dot{\theta}\overrightarrow{z_2} - \dot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{x_2}) + A\ddot{\psi}\cos\theta\,\overrightarrow{z_2} - A\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{z_2} + A\dot{\psi}\cos\theta\,(-\dot{\theta}\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{x_2})$$

D'où :

$$\vec{\delta}_{I(3/R_0)} = \left(A\ddot{\theta} - B\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + A\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\overrightarrow{x_2} + \left(A\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta + B\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\right) - A\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\overrightarrow{y_2} + (-A\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta + B\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\theta} + A\ddot{\psi}\cos\theta - A\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)\overrightarrow{z_2}$$

$\Rightarrow$

9)

$$\boxed{\vec{\delta}_{I(3/R_0)} = \left(A\ddot{\theta} - B\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + A\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\overrightarrow{x_2} + \left(B\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\right)\right)\overrightarrow{y_2} + (-2A\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta + A\ddot{\psi}\cos\theta + B\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\theta})\overrightarrow{z_2}}$$

$$\{\mathcal{D}(3/R_0)\}_{(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})} = \left\{\begin{array}{c|c} mR\ddot{\psi} & A\ddot{\theta} - B\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + A\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta \\ mR\dot{\psi}^2\cos\theta & B\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\right) \\ -mR\dot{\psi}^2\sin\theta & -2A\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta + A\ddot{\psi}\cos\theta + B\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\theta} \end{array}\right\}$$

10)

PFD appliqué au moment de la nacelle (3) dans son mouvement % R_0

$$\{\tau(\bar{3} \longrightarrow 3\}_{(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})} = \{\mathcal{D}(3/R_0)\}_{(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$$

Avec

$$\{\tau_S(\bar{3} \longrightarrow 3\}_I = \{\tau(2/3)\}_I + \{\tau(m/3)\}_I + \{\tau(pes/3)\}_I$$

$$= \begin{Bmatrix} X_{2/3} & L_{2/3} \\ Y_{2/3} & 0 \\ Z_{2/3} & N_{2/3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{23} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_I + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ mg\sin\theta & 0 \\ mg\cos\theta & 0 \end{Bmatrix}_I$$

$$\{\tau_S(\bar{3} \longrightarrow 3\}_I = \begin{Bmatrix} X_{2/3} & L_{2/3} \\ Y_{2/3} + mg\sin\theta & C_{23} \\ Z_{2/3} + mg\cos\theta & N_{2/3} \end{Bmatrix}_{(I,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$$

$\{\mathcal{D}(3/R_0)\}_I$ projeté dans $R_2 = \{\tau_S(\bar{3} \longrightarrow 3\}_I$ projeté dans R_0

D'où on obtient

$X_{2/3} = mR\ddot{\psi}$ (1)

$Y_{2/3} + mg\sin\theta = mR\dot{\psi}^2\cos\theta$ (2)

$Z_{2/3} + mg\cos\theta = -mR\dot{\psi}^2\cos\theta$ (3)

$L_{2/3} = A\ddot{\theta} - B\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + A\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta$ (4)

$C_{23} = B\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\right)$ (5)

$N_{2/3} = -2A\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta + A\ddot{\psi}\cos\theta + B\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\dot{\theta}$ (6)

D'où l'expression du couple moteur est déduite de l'équation (5) :

$$\boxed{C_{23} = B\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\right)}$$

Exercice 4 :

Calculs relatifs au solide S_1

$$\overrightarrow{V_{G1}(S_1/R_0)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OG_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}.\overrightarrow{x_1}\right) = -\frac{l}{2}.\dot{\theta}_1.\overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{G1}(S_1/R_0)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{G1}(S_1/R_0)}\right) = -\frac{l}{2}.\ddot{\theta}_1.\overrightarrow{z_1} - \frac{l}{2}.\dot{\theta}_1^2.\overrightarrow{x_1}$$

2°/

* **Torseur cinétique :**

Cherchons le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_o}(S_1/R_0) = \underbrace{m_1.\overrightarrow{OG_1} \wedge \overrightarrow{V_O}(S_1/R0)}_{\overrightarrow{0}} + \left[I(S_1)\right]_O.\Omega(S_1/R_0)$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} \dot{\theta} \end{pmatrix} = B_1.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_1}$$

Le torseur cinétique est : $\{\tau(S_1/R_0)\}_O = \left\{\begin{array}{l} -\,m_1.\frac{l}{2}.\dot{\theta}_1.\overrightarrow{z_1} \\ B_1.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_1} \end{array}\right\}_O$

*** Torseur dynamique:**

Cherchons le moment dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_o}(S_1/R_0) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma_o}(S_1/R_0)) + \underbrace{m_1.\overrightarrow{V_o}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V_{G1}}(S_1/R_0)}_{\overrightarrow{0}}$$

$$= B_1.\ddot{\theta}.\overrightarrow{y_1}.$$

Le torseur dynamique est : $\{\delta(S_1/R_0)\}_O = \left\{\begin{array}{l} m_1.\frac{l}{2}(-\ddot{\theta}_1.\overrightarrow{z_1} - \dot{\theta}_1^2.\overrightarrow{x_1}) \\ B_1.\ddot{\theta}.\overrightarrow{y_1} \end{array}\right\}_O$

3°/ Calculs relatifs au solide S_2

$$\overrightarrow{V_{G2}}(S_2/R_0) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OG_2}) = \frac{d}{dt}(l.\overrightarrow{x_1}) = -l.\dot{\theta}_1.\overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{G2}}(S_2/R_0) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_{G2}}(S_2/R_0)) = -l.\ddot{\theta}_1.\overrightarrow{z_1} - l.\dot{\theta}_1^2.\overrightarrow{x_1}$$

4°/

*** Torseur cinétique** :

Cherchons le moment cinétique :

Le solide S_2 est de révolution, sa matrice est la même dans le repère R_1.

$$\overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0) = \overrightarrow{\Omega}(S_2/R_1) + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\theta}_2.\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_1.\overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G2}}(S_2/R_0) = \underbrace{m_2.\overrightarrow{G_2G_2} \wedge \overrightarrow{V_{G2}}(S_2/R0)}_{\overrightarrow{0}} + [I(S_2)]_{G2}.\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}$$

$$= \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(G_2,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} . \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = A_2.\dot{\theta}_1.\overrightarrow{y_1} + C_2.\dot{\theta}_2.\overrightarrow{z_1}$$

Le torseur cinétique est : $\{\tau(S_2/R_0)\}_{G2} = \left\{ \begin{array}{c} -\ m_2 . l . \dot{\theta}_1 . \overrightarrow{z_1} \\ A_2 . \dot{\theta}_1 . \overrightarrow{y_1} + C_2 . \dot{\theta}_2 . \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_{G2}$

*** Torseur dynamique:**

Cherchons le moment dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_{G2}}(S_2/R_0) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma_{G2}}(S_2/R_0)) + \underbrace{m_2 . \overrightarrow{V_{G2}}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V_{G2}}(S_1/R_0)}_{\overrightarrow{0}}$$

$$= A_2 . \ddot{\theta} . \overrightarrow{y_1} + C_2 . \ddot{\theta}_2 . \overrightarrow{z_1} + A_2 . \dot{\theta} . \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_{R0}}_{\overrightarrow{0}} + C_2 . \dot{\theta}_2 . \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{z_1}}{dt}\right)_{R0}}_{\dot{\theta} . \overrightarrow{x1}}$$

Le torseur dynamique est :

$$\{\delta(S_2/R_0)\}_{G2} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 . l \left(\ddot{\theta}_1 . \overrightarrow{z_1} - \dot{\theta}_1^2 . \overrightarrow{x_1} \right) \\ A_2 . \ddot{\theta}_1 . \overrightarrow{y_1} + C_2 . \ddot{\theta}_2 . \overrightarrow{z_1} + C_2 . \dot{\theta}_2 . \dot{\theta}_1 . \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_{G2}$$

Examens Proposés En Dynamique Des Solides

Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Nabeul

Département de Génie Mécanique

EXAMEN DE MECANIQUE GENERALE

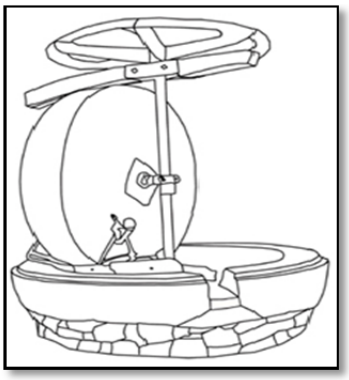
Année universitaire : 2008/2009. Date : le 11/06/2009

Classe : GM 11+12+13+14+15+16. Nombre de pages : 2

Durée : 1 heure 30 mn. Documents : non autorisés.

Proposé par : M. Bouden&M. Amdouni&M. Kalleli&M. Tlili

ETUDE DYNAMIQUE D'UNE MEULE A HUILE



La figure à droite représente une meule à huile artisanale qui a été utilisée par nos ancêtres pour le broyage et l'écrasement des olives avant la phase de l'essorage pour l'obtention de l'huile d'olive.
Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à l'étude dynamique de cet appareil.

Comme le montre la figure (1), Pour écraser les olives, la meule (2) qui roule sans glisser sur le socle en pierre (0), est entraînée en rotation par le bras (1). Dans la modélisation de l'appareil figure (2), on associe au socle(0) le repère $R_0(A,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ avec $(A,\vec{z}_0)$ axe de la rotation.

Le repère $R_1(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$ est associé au bras(1), avec $\alpha=(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_0})$, **α(négatif)**.Le repère $R_2(G,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ est associé à la meule (2) avec $\theta=(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2})=(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2})$.

On suppose que la meule roule sans glisser au point I sur le socle. Un moteur M applique un couple C_m sur le bras (1).On néglige le poids du bras et son inertie devant celle de la meule(2) de masse m d'épaisseur h, de rayon R. La liaison pivot entre le socle (0) et le bras (1) d'axe $(A,\vec{z}_0)$ et la liaison pivot entre la meule (2) et le bras (1) d'axe $(A,\vec{x}_1)$ sont parfaites, sauf la liaison entre la meule (2) et le socle(0) (coefficient de frottement f).

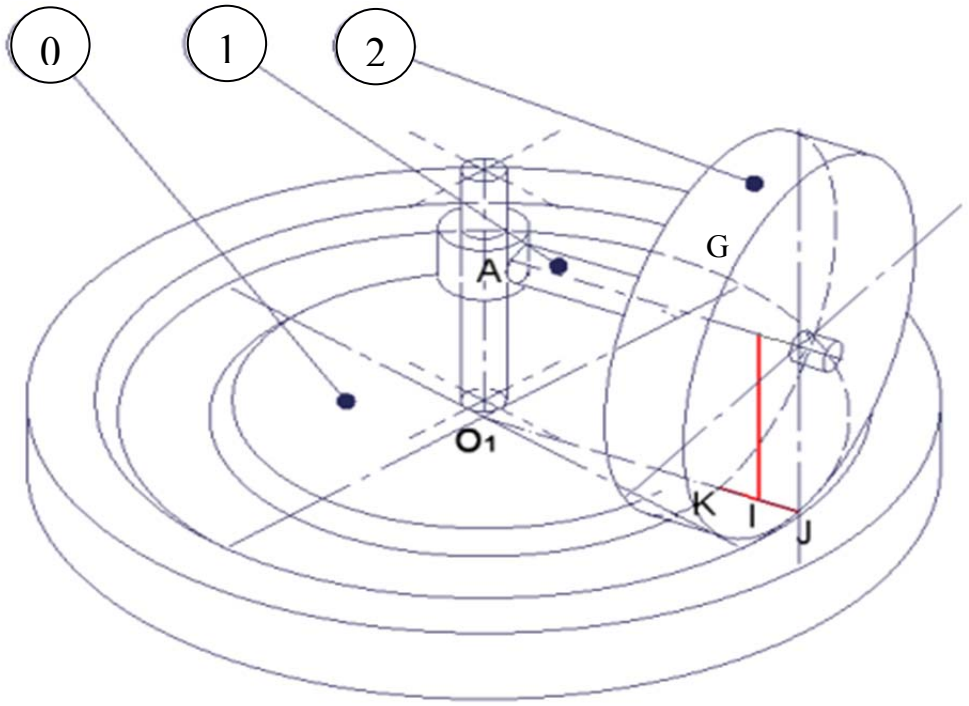
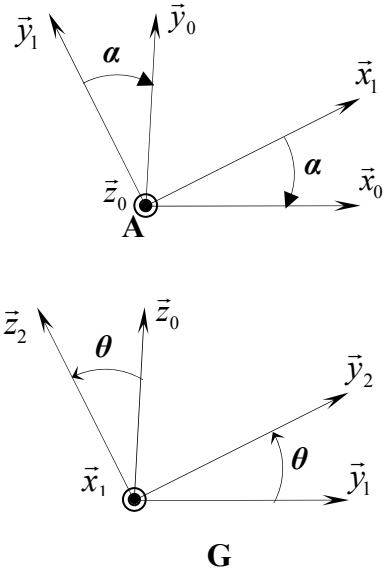


Figure (1)



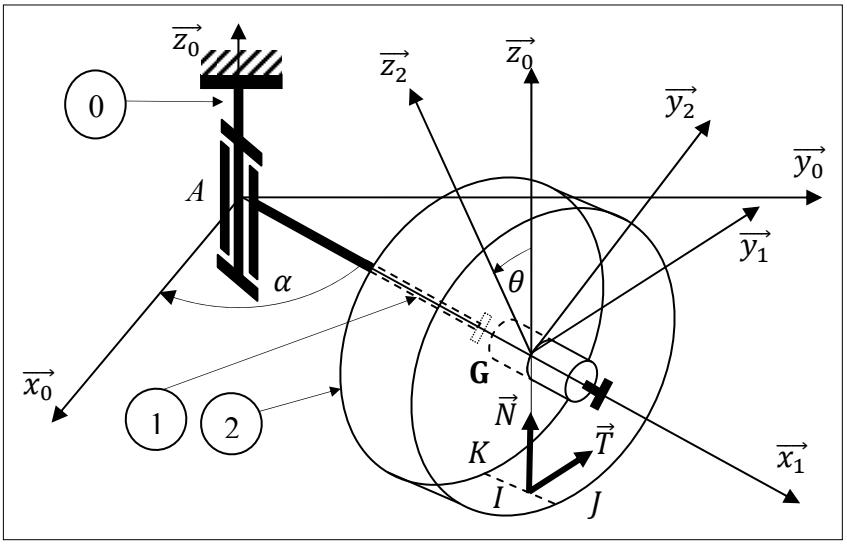


Figure (2) : Modélisation de la meule à huile

On donne :

$\overrightarrow{GI} = -R \cdot \vec{z}_0$, avec R : rayon de la meule.

$\overrightarrow{AG} = a \cdot \vec{x}_1$, G, I, J et K sont dans le plan médian de la meule.

$$[I_{(2)}]_G = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}_{(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)} \quad \text{avec : A}=\frac{mR^2}{2} \text{ et } \text{B}=\frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12}$$

$$\{\tau_{(3/2)}\}_G = \begin{Bmatrix} X_{3/2} & 0 \\ Y_{3/2} & M_{3/2} \\ Z_{3/2} & N_{3/2} \end{Bmatrix}_{G\,(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)} \qquad \{\tau_{(pes/2)}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_{G\,(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)} \qquad \{\tau_{(sol/2)}\}_I = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \\ N & 0 \end{Bmatrix}_{I\,(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

$$avec T = f.N$$

Travail demandé :

1) Calculer $\vec{\Omega}\ (R_2/R_1)$ et $\vec{\Omega}\ (R_1/R_0)$ et en déduire $\vec{\Omega}\ (R_2/R_0) = \vec{\Omega}\ (R_2/R_1) + \vec{\Omega}\ (R_1/R_0)$.

2) Calculer $\vec{V}(G \in 2/R_0)$.

3) Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}(G \in 2/R_0)$.

4) Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}_G(2/R_0)$ de la meule (2) par rapport au repère $R_0(A, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ au point G.

5) Calculer le moment dynamique $\vec{\delta}_G(2/R_0)$ de la meule (2) par rapport au repère $R_0(A, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ au point G.

6) Donner alors le torseur dynamique $\{D_{(2/R_0)}\}_G$ de la meule (2) par rapport au repère $R_0(A, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ au point G.

7) Transformer le torseur statique appliqué par le socle en pierre (0) à la meule (2) au point G, appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) sur la meule (2) et en déduire les inconnues $X_{3/2}$, $Y_{3/2}$, $Z_{3/2}$, $M_{3/2}$, $N_{3/2}$ et N en fonction des données du problème.

BON TRAVAIL

CORRECTION D'EXAMEN DYNAMIQUE DES SOLIDES (JUIN 2009)

1) $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta}\vec{x}_1$

$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = -\dot{\alpha}\,\vec{z}_o$

D'où $\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\theta}\vec{x}_1 - \dot{\alpha}\,\vec{z}_o$

2) $\vec{V}(G \in 2/R_0) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{AG}\right)_{RO} = \left(\frac{d}{dt}\,a\overrightarrow{x1}\right)_{RO}$

$= a\,\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}\right)_{RO}$

$= a\left[\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}\right)_{R1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\,\vec{x}_1\right]$

$\left[\vec{0} - \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}\,\Lambda\overrightarrow{x_1}\right]$

$= -a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$

D'où $\vec{V}(G \in 2/R_0) = -a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$

3) $\vec{\Gamma}(G \in 2/R_0) = \left(\frac{d}{dt}\,\vec{V}(G \in 2/R_0)\right)R_0$

$\Rightarrow \vec{\Gamma}(G \in 2/R_0) = \left(\frac{d}{dt}\,(-a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}\right)R_0$

$= -a\ddot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - a\dot{\alpha}\left(\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)R_0$

$= -a\ddot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - a\dot{\alpha}\left[\vec{0} - \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}\,\Lambda\overrightarrow{y_1}\right]$

$= -a\ddot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - a\dot{\alpha}\,(\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1})$

$= -a\ddot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - a\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1}$

D'ou $\vec{\Gamma}(G \in 2/R_0) = -a\ddot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - a\dot{\alpha}_1{}^2\overrightarrow{x_1}$

4) $\vec{\sigma}(G \in 2/R_0) = [I(2)]_{(G,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})}\,(\vec{\Omega}(R_2/R_0)_{(G,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})}$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(G \in 2/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= A\,\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} - \dot{\alpha}B\overrightarrow{z_0} = \frac{mR^2}{2}\,\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} - \dot{\alpha}\left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\right)\overrightarrow{z_0}$$

$$= \frac{mR^2}{2}\,\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} - \dot{\alpha}\left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\right)\overrightarrow{z_0}$$

5) $\vec{\delta}_G(2/R_0) = \frac{d}{dt}\left(\sigma_G(2/R_0)\right)_{R_0}$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} - \dot{\alpha}\left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\right)\overrightarrow{z_1}\right)R_0$$

$$= \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} + \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}(-\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}) - \left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\right)\ddot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$$

D'où : $\overrightarrow{\delta_G}(2/R_0) = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} - \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - \left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\right)\ddot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$

6) $\{D(2/R_0)\}_G = \begin{Bmatrix} m\,\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_G(2/R_0) \end{Bmatrix}_G$

D'où :

$$\left\{ D(2/Ro) \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} -ma\dot{\alpha}^2 & \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta} \\ -ma\ddot{\alpha}^2 & -\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\dot{\alpha} \\ 0 & -\left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\right)\ddot{\alpha} \end{array} \right\}_{(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

7) Transferts des torseurs statiques :

$\{\tau(sol/2)\}_{I\to G}$

On a $\overrightarrow{MG}(\vec{R}_1) = \overrightarrow{MI}(\vec{R}_1) + \overrightarrow{GI} \wedge \vec{R}_1$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MG}(\vec{R}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RT \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\tau(sol/2)\}_G = \{\tau(1/2)\}_G + \{\tau(pes/2)\}_G + \{\tau(sol/2)\}_G$$

$$\Rightarrow \left\{\tau(\overrightarrow{Fext} \to 2)\right\}_G^{b1} = \begin{Bmatrix} x_{1/2} & 0 \\ y_{1/2} & M_{1/2} \\ z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix}_G^{b_1} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_G^{b_1} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \\ N & 0 \end{Bmatrix}_G^{b_1} = \begin{Bmatrix} x_{1/2} & 0 \\ y_{1/2} & M_{1/2} \\ z_{\frac{1}{2}}+N-mg & N_{1/2} \end{Bmatrix}_G^{b_1}$$

PFD sur le mouvement de (2) % Ro :

$$\{D(2/R_0)\}_{(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)} = \left\{\tau\left(\vec{F}_{ext\to(2)}\right)\right\}_{(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{c|c} -ma\dot{\alpha}^2 & \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta} \\ -ma\ddot{\alpha}^2 & -\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\dot{\alpha} \\ 0 & -\left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\right)\ddot{\alpha} \end{array} \right\}_{(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1/2} & R\rho N \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{array} \right\}_{(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

on obtient alors le système d'équations suivant :

$X_{1/2} = -ma\dot{\alpha}^2$ (1)

$\rho N + Y_{1/2} = -ma\ddot{\alpha}^2$ (2)

$Z_{1/2} + N - mg = 0$ (3)

$\rho RN = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}$ (4)

$M1/2 = -\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\dot{\alpha}$ (5)

$N1/2 = -(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12})\ddot{\alpha}$ (6)

D'où

$X_{1/2} = -ma\dot{\alpha}^2$ d'après (1)

$N = \frac{mR^2}{2\rho R}\ddot{\theta}$ d'après (4)

$Y_{1/2} = -ma\ddot{\alpha} - \rho N$ d'après (2)

D'où : $Y_{1/2} = -ma\ddot{\alpha} - \frac{mR}{2}\ddot{\theta}$

$Z_{1/2} = mg - N$ d'après (3)

$\Rightarrow Z_{1/2} = mg - \frac{mR}{2\rho}\ddot{\theta}$

$M_{1/2} = -\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\dot{\alpha}$ d'après d'après(5)

$N_{1/2} = -\left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\right)\ddot{\alpha}$ d'après (6)

EXAMEN EN DYNAMIQUE DES SOLIDES

Année universitaire : 2009/2010. Date : le 16 /06/2010

Classe : GM11, 12, 13, 14, 15,16. Nombre de pages : 4

Durée : 1 h 30. Documents : non autorisés.

Proposé par Mrs: Kalleli.S &Jerbi.M & Amdouni.H & Bouden.M

Etude d'un variateur à plateaux

Le variateur schématisé ci-dessous est constitué :

- D'un bâti (1)
- D'un plateau moteur (2) en liaison pivot d'axe $(A;\vec{x})$ avec le bâti .le plateau est entrainé en rotation par un moteur électrique non représenté.
- D'un plateau récepteur (4), en liaison pivot d'axe $(D;\vec{x})$ avec le bâti.
- D'un galet (3), en liaison pivot glissant d'axe $(E;\vec{y})$ avec le bâti (1), l'ordonnée *y* des point B et de C peut varier. Son mouvement n'est pas limité par le bâti. La commande de la translation du galet n'est pas représentée.

On suppose qu'au point B il y a **roulement sans glissement** entre les solides (2) et (3) et aussi au point C entre les solides (3) et (4).

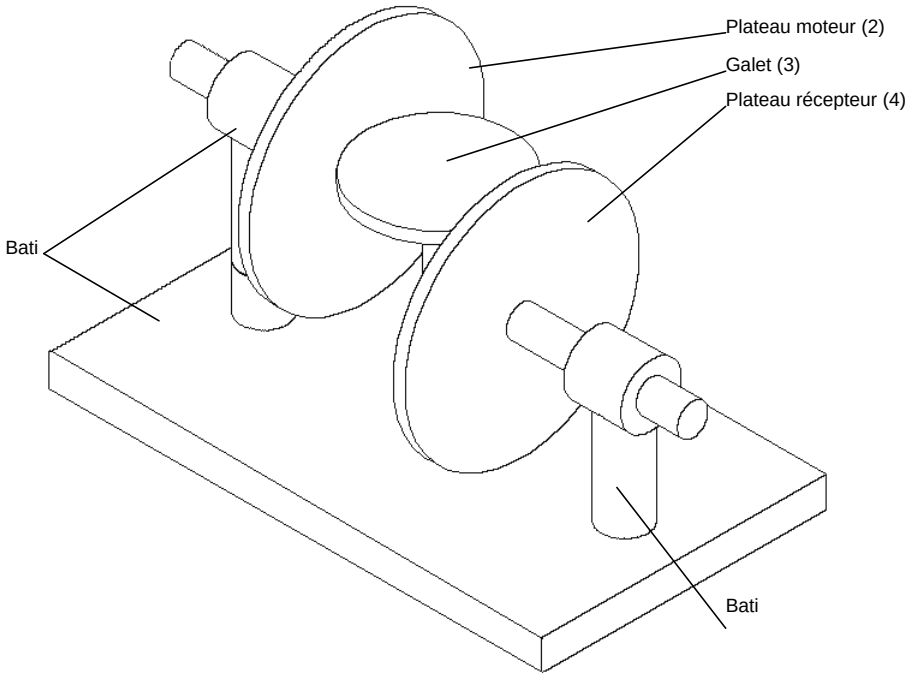


Figure (1)

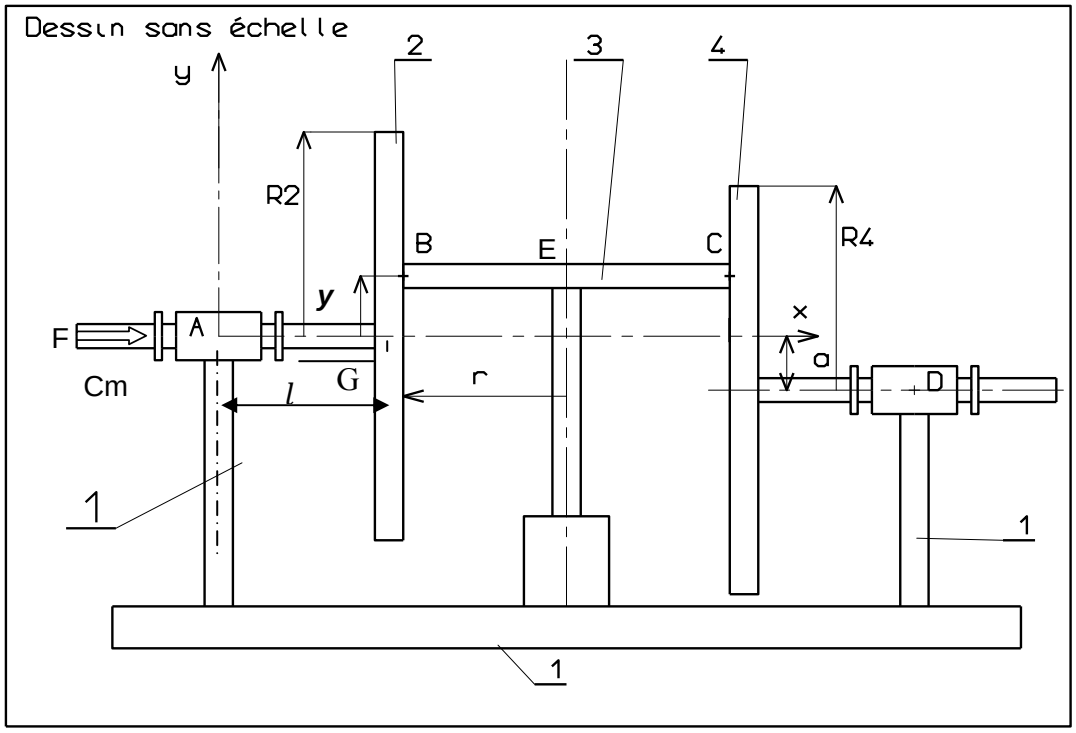


Figure (2)

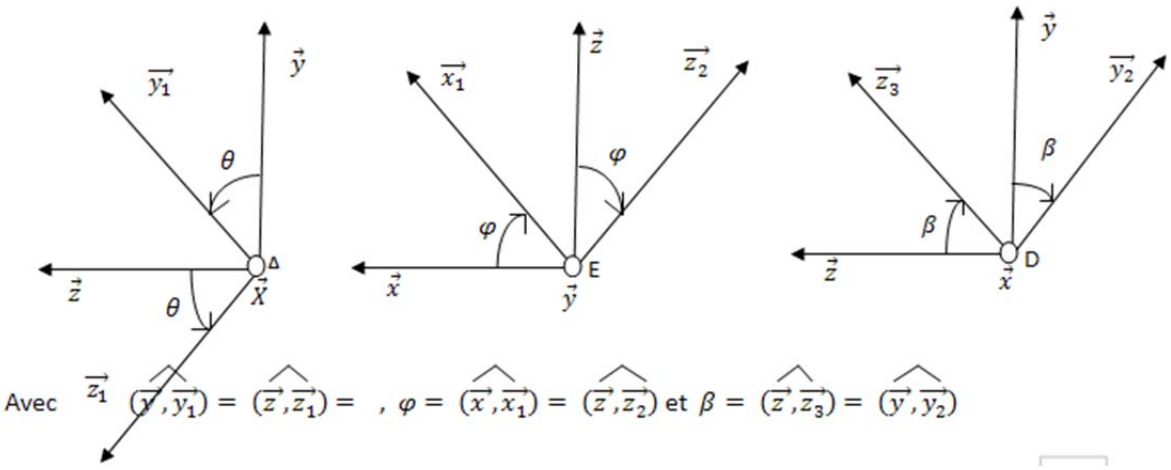
Soit :

$\mathbf{R_1}\ (\mathbf{A}, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$ Un repère lié au bâti **(1)**

$\mathbf{R_2}\ (\mathbf{G}, \vec{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y_1}}, \overrightarrow{\mathbf{z_1}})$ Un repère lié au plateau moteur $(\mathbf{2})$

$\mathbf{R_3}\ (\mathbf{E}, \overrightarrow{\mathbf{x_1}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z_2}})$ Un repère lié au galet **(3)**

$\boldsymbol{R_4}(\boldsymbol{D}, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y_2}}, \overrightarrow{\boldsymbol{z_3}})$ Un repère lié au plateau récepteur $(\mathbf{4})$



Avec $(\vec{y}, \overrightarrow{y_1}) = (\vec{z}, \overrightarrow{z_1}) =$, $\varphi = (\vec{x}, \overrightarrow{x_1}) = (\vec{z}, \overrightarrow{z_2})$ et $\beta = (\vec{z}, \overrightarrow{z_3}) = (\vec{y}, \overrightarrow{y_2})$

Données du problème :

- Le plateau moteur (2) est assimilé à un disque d'épaisseur **e** négligeable , de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R_2}$, de centre de gravité **G** et encastré à une tige de **masse négligeable**.
- La matrice d'inertie du plateau moteur (2) au point G est :

$$\left[I_{(2/R)}\right]_{(G,\vec{x},\vec{y_1},\vec{z_1})} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y_1},\vec{z_1})} \quad \text{Avec : } A = \frac{mR_2^2}{2} \text{ et } B = \frac{m\,R_2^2}{4}$$

- $\overrightarrow{AG} = l\,\vec{x}$; $\overrightarrow{BG} = -y\,\vec{y}$
- Les torseurs statiques des actions appliquées sur le plateau moteur (2) sont :

$$\left\{\tau_{(1/2)}\right\}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad ; \quad \left\{\tau_{(Moteur/2)}\right\}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left\{\tau_{(3/2)}\right\}_{(B,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ fN & 0 \end{Bmatrix}_{(B,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} \quad \text{Avec} = f.N \text{ , } f \text{ est le coefficient de frottement}$$

$$\left\{\tau_{(pes/2)}\right\}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Questions :

1) Calculer les vecteurs de rotations : $\vec{\Omega}\,(\boldsymbol{R_2/R_1})$; $\vec{\Omega}\,(\boldsymbol{R_3/R_1})$ et $\vec{\Omega}\,(\boldsymbol{R_4/R_1})$.

2) Calculer $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{G} \in \mathbf{2/R_1})$

3) Calculer le torseur cinétique $\{\boldsymbol{\mathcal{C}}(\mathbf{2}\ /\ \mathbf{R_1})\}_{\boldsymbol{G}}$ du plateau moteur (2) par rapport au repère $R_1\,(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ au point G.

4) Calculer l'énergie cinétique du plateau moteur (2) $\boldsymbol{E_c}(\mathbf{2/R_1})$

5) Calculer l'accélération $\vec{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{G} \in \mathbf{2/R_1})$

6) Déterminer le torseur dynamique $\{\mathfrak{D}(\mathbf{2}\ /\ \mathbf{R_1})\}_{\boldsymbol{G}}$ du plateau moteur (2) par rapport au repère $R_1\,(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ au point G

7) Exprimer le torseur statique des actions mécaniques extérieures appliquées sur le plateau moteur (2) au point G et dans le repère R_1 $\left\{\boldsymbol{\tau_{\overrightarrow{Fext}\to 3}}\right\}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

8) Appliquer le principe fondamental de la dynamique sur plateau moteur (2) et déterminer les inconnues statistiques ($\boldsymbol{X_{1/2}}, \boldsymbol{Y_{1/2}}, \boldsymbol{Z_{1/2}}, \boldsymbol{M_{1/2}}, \boldsymbol{N_{1/2}}$ **et** $\boldsymbol{N}$) en fonction des données du problème.

Bon courage

Correction examen dynamique de solides

1) $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta}\vec{x}$

$\vec{\Omega}(R_3/R_1) = -\varphi\vec{y}$

$\vec{\Omega}(R_4/R_1) = -\dot{\beta}\vec{x}$

2) $\vec{v}(G\in 2/R_1) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{AG}\right)_{R_1} = \left(\frac{d}{dt}l\,\vec{x}\right)_{R_1} = \vec{0}$

3) $\{C(2/R_1)\}_G = \begin{Bmatrix} m\vec{v}(G\in 2/R_1) \\ \overrightarrow{\sigma_G}(2/R_1) \end{Bmatrix}_G$

$\overrightarrow{\sigma_G}(2/R_1) = [I(2/R_1)]^{b2}_G [\vec{\Omega}(R_2/R_1)]^{b_2}_G$

$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_G}(2/R_1) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}^{b_2}_G . \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{b_2}_G$

$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_G}(2/R_1) = A\,\dot{\theta}\,\vec{x} = \frac{mR_2^2}{2}\dot{\theta}\,\vec{x}$

D'où $\{C(2/R_1)\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{mR_2^2\dot{\theta}}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{b1}_G$

4) $2Ec(2/R_1) = \left\{C(2/R_1)\right\}^{b_1}_G . \left\{v(2/R_1)\right\}^{b_1}_G$

$$= \begin{Bmatrix} m\vec{v}(G\in(2/R_1)) \\ \overrightarrow{\sigma_G}((2/R_1)) \end{Bmatrix}^{b1}_G . \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/R_1) \\ \vec{v}(G\in 2/R_1) \end{Bmatrix}^{b1}_G$$

$\Rightarrow 2Ec(2/R_1) = m\vec{v}^2(G\in 2/R_1) + \overrightarrow{\sigma_G}(2/R_1).\vec{\Omega}(2/R_1) \Rightarrow 2Ec(2/R_1) = \frac{mR_2^2}{2}\dot{\theta}^2$

D'où $E_c(2/R_1) = \frac{mR_2^2}{4}\dot{\theta}^2$

5) $\vec{\Gamma}(G\in 2/R_1) = \left(\frac{d}{dt}\vec{v}(G\in 2/R_1)\right)/R_1 = \vec{0}$

6) $\{D(2/R_1)\}_G = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G\in 2/R_1) \\ \overrightarrow{\delta_G}(2/R_1) \end{Bmatrix}_G$

$\overrightarrow{\delta_C}\left(\frac{2}{R_1}\right) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_C}\left(2/R_1\right)\right)_{R_1} = \frac{mR_2^2}{2}\ddot{\theta}\,\vec{x}$

$d'où \{D(2/R1)\}_G^{b_1} = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{mR_2^2\ddot{\theta}}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G^{b_1}$

7) $\{\tau_{\bar{F}ext\to 1}\}_G^{b_1} = \left\{\tau\left(\frac{1}{2}\right)\right\}_G^{b_1} + \{\tau(moteur/2)\}_G^{b1} + \left\{\tau\left(\frac{3}{2}\right)\right\}_G^{b_1} + \{\tau(pes/2)\}_G^{b_1}$

- *Transfert de tous les torseurs au point G :*
- $\left\{\tau\left(\frac{1}{2}\right)\right\}_G^{b1} = \begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & Z_{1/2}l + M_{1/2} \\ Z_{1/2} & -Y_{1/2}l + N_{1/2} \end{Bmatrix}_G^{b_1}$
- $\{\tau(3/2)\}_G^{b1} = \begin{Bmatrix} N & fNy \\ O & 0 \\ fN & -Ny \end{Bmatrix}_G^{b1}$

D'où

$$\left\{\tau_{\overrightarrow{(Fext\to 2)}}\right\}_G^{b_1} \begin{Bmatrix} X_{1/2} + N & Cm + fNy \\ Y_{1/2} - mg & Z_{1/2}l + M_{1/2} \\ Z_{1/2} + FN & -Y_{1/2}l + N_{1/2} - Ny \end{Bmatrix}_G^{b1}$$

8) *PFD appliqué au mouvement de (2) par rapport à R_1 :* $\{\tau_{\bar{F}ext\to 2}\}_G^{b_1} = \{D(2/R1)\}_G^{b1}$

En projetant les composantes de deux torseurs dans le repère R1, on obtient le système d'équations suivantes :

$X_{1/2} + N = 0$

$Y_{1/2} - mg = 0$

$Z_{1/2} + fN = 0$

$$C_m + fNy = \frac{mR_2^2\ddot{\theta}}{2}$$

$Z_{1/2}l + M_{1/2} = 0$

$-Y_{1/2}l + N_{1/2} - Ny = 0$

D'où

$$Y_{1/2} = mg$$

$$N = \frac{1}{fy}\left(\frac{mR_2^2\ddot{\theta}}{2} - C_m\right)$$

$$Z_{1/2} = -\frac{1}{y}\left(\frac{mR_2^2}{2}\ddot{\theta} - C_m\right)$$

$$X_{1/2} = -\frac{1}{fy}\left(\frac{mR_2^2\ddot{\theta}}{2} - C_m\right)$$

$$M_{1/2} = \frac{1}{y}\left(\frac{mR_2^2\ddot{\theta}}{2} - C_m\right)$$

$$N_{1/2} = \frac{1}{y}\left(\frac{mR_2^2\ddot{\theta}}{2} - C_m\right) + lmg$$

Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Nabeul
Département de Génie Mécanique

EXAMEN EN MECANIQUE GENERALE

Année universitaire: 2009/2010. Date: le 24/04/2010
Classe: GM 11- 16. Nombre de pages :3
Durée: 1 heure. Documents: non autorisés.

Proposé par: Mrs. BOUDEN, AMDOUNI, KALLELI & JERBI.

ETUDE DU MOUVEMENT D'UN DEMI DISQUE SUR UN PLAN HORIZONTAL

Le solide à étudier est un demi disque homogène (1), de masse **m,** de rayon **a** et de centre **A**. Son centre de gravité est noté G. On lui associe le repère $R_1 = (A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$. Celui-ci roule sans glisser sur le plan (0), dont on lui associe le repère $Ro = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.

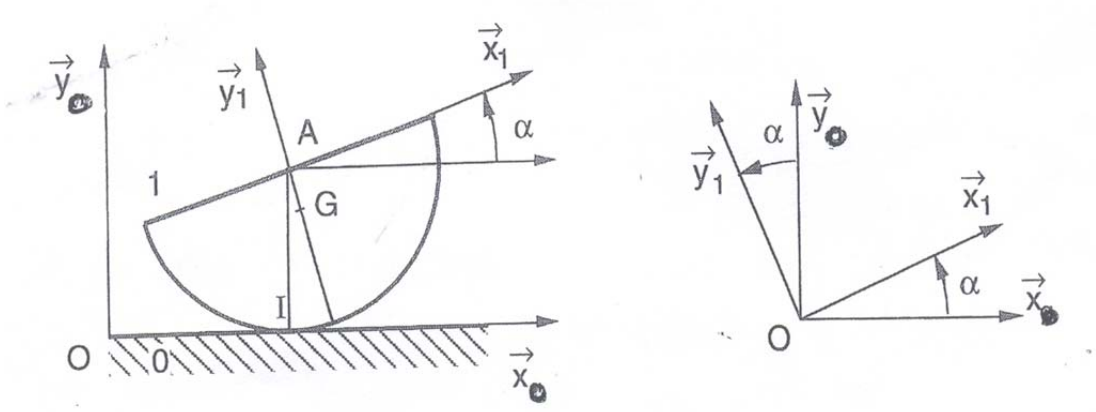


Figure 1 : demi disque sur un plan

On donne

$$\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_0}; \alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}); \overrightarrow{GA} = b\overrightarrow{y_1}; \overrightarrow{IA} = a\overrightarrow{y_0}$$

$$[I(1)]_{(A,R_1)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad avec \quad A = \frac{ma^2}{4}; B = \frac{ma^2}{4}; C = \frac{ma^2}{2}$$

$$\{\tau_{(pes/1)}\}_G \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix}_{(G,R_0)}; \{\tau_{(0/1)}\}_I = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(I,R_0)}$$

TRAVAIL DEMANDE :

1) Calculer le vecteur rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{R_1/R_0}}$
2) Sachant qu'il y a roulement sans glissement au point de contacte I, calculer $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{I})_{\boldsymbol{/R_0}}$et en déduire $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{G})_{\boldsymbol{/R_0}}$.
3) **Calcul de torseur cinétique :**
   a- Calculer la résultante cinétique du disque par rapport à $\boldsymbol{R_0}$
   b- Calculer le moment cinétique du disque $\vec{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{1/R_0})$
4) Calculer le vecteur accélération $\vec{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{G})_{\boldsymbol{/R_0}}$
5) **Calcul de torseur dynamique**
   a- Calculer la résultante dynamique du disque par rapport à $\boldsymbol{R_0}$
   b- Exprimer la dans le repère $\boldsymbol{R_0}$
   c- Calculer le moment dynamique du disque $\vec{\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{1/R_0})$
   d- Utiliser la formule de transport des moments pour le calculer au point $\boldsymbol{R_0}$; $\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{1})\}_{(\boldsymbol{I},\boldsymbol{R_0})}$
6) Calculer le torseur des actions mécaniques extérieures sur le disque au point I
7) Appliquer le principe fondamentale de la dynamique au disque et déterminer les inconnues **X, Y** et l'équation de mouvement de (1) par rapport à $\boldsymbol{R_0}$

N.B. le barème est approximatif.

Bonne chance

CORRECTION DE L'EXAMEN EXMG 22-06-2011

1) $\vec{\Omega}R_1/R_0 = \dot{\alpha}\vec{z}_0$

2) $\vec{V}R_1/R_0 = \vec{0}$ R.S.G

$\vec{V}(G)R_0 = \vec{V}(I)/R_0 + \overrightarrow{GI} \Lambda \vec{\Omega}R_1/R_0$

$= \vec{0} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI}) \Lambda \vec{\Omega}R_1/R_0$

$= (b\vec{y}_1 - a\vec{y}_0) \Lambda \dot{\alpha}\vec{z}_0$

$\vec{V}(G)R_0 = b\dot{\alpha}\vec{x}_1 - a\dot{\alpha}\vec{x}_0$

3) a) Résultat cinétique : $m\vec{V}(G)R_0 = m\ \dot{\alpha}(b\overrightarrow{x_1} - a\overrightarrow{x_0})$

b) $\sigma(A,1/Ro) = m\overrightarrow{AG} \Lambda \vec{V}(A)R_0 + [I(1)]_{(A,R1)}\ \vec{\Omega}R_1/R_0$

- $\vec{V}(A)R_0 = \vec{V}(I)R_0 + \overrightarrow{AI} \Lambda \vec{\Omega}R_1/R_0$

$= \vec{0} - a\overrightarrow{y_0} \Lambda \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} = -a\dot{\alpha}\overrightarrow{x_0}$

D'où :

$$\vec{\sigma}(A_{1/RO}) = -mb\vec{y}_1 \Lambda (-a\dot{\alpha}\overrightarrow{x_0}) + \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$= mab\dot{\alpha}(\vec{y}_1 \Lambda \vec{x}_0) + c\dot{\alpha}\vec{z}_0$

$= mab\dot{\alpha}\ [(-sin\alpha\vec{x}_0 + cos\alpha\vec{y}_0)\Lambda \vec{x}_0] + C\dot{\alpha}\vec{z}_0$

$= -mab\dot{\alpha}\cos\alpha\ \vec{z}_0 + c\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$

$\vec{\sigma}(A_{1/RO}) = m\dot{\alpha}a(\frac{a}{2} - b\cos\alpha)\vec{z}_0$

4) $\vec{\Gamma}_{(G)RO} = \frac{d}{dt/Ro}\vec{V}_{(G)/Ro} = \frac{d}{dt/Ro}[b\dot{\alpha}\vec{x}_1 - a\dot{\alpha}\vec{x}_0]$

$= b\ddot{\alpha}\vec{x}_1 + b\dot{\alpha}\frac{d\vec{x}_1}{dt/Ro\vec{0}} - a\ddot{\alpha}\vec{x}_0$

$= b\ddot{\alpha}\vec{x}_1 + b\dot{\alpha}\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt/R1}\ \vec{\Omega}_{R1/R0}\Lambda\vec{x}_1\right] - a\ddot{\alpha}\vec{x}_0$

$= b\ddot{\alpha}\vec{x}_1 + b\dot{\alpha}[\dot{\alpha}\vec{z}_0 \Lambda\vec{x}_1] - a\ddot{\alpha}\vec{x}_0$

$\vec{\Gamma}_{(G)RO} = b\ddot{\alpha}\vec{x}_1 + b\dot{\alpha}^2\vec{y}_1 - a\ddot{\alpha}\vec{x}_0$

5) a) Résultante dynamique $= m\vec{\Gamma}_{(G)RO} = m[b\ddot{\alpha}\vec{x}_1 + b\dot{\alpha}^2\vec{y}_1 - a\ddot{\alpha}\vec{x}_0]$

b) on a $\overrightarrow{x_1} = \cos\alpha\ \vec{x}_0 + \sin\alpha\vec{y}_0$ et $\vec{y}_1 = -\sin\alpha\vec{x}_0 + \cos\alpha\ \vec{y}_0$

donc $m\vec{\Gamma}_{(G)RO} = m[b\ddot{\alpha}(\cos\alpha\vec{x}_0 + \cos\alpha\vec{y}_0] + b\dot{\alpha}^2(-\sin\alpha\vec{x}_0 + \cos\alpha\ \vec{y}_0) - a\ddot{\alpha}\vec{x}_0\ ]$

$$m\vec{\Gamma}_{(G)RO} = m\ [(b\ddot{\alpha}\cos\alpha - b\dot{\alpha}^2\sin\alpha - a\ddot{\alpha})\vec{x}_0 + (b\ddot{\alpha}\sin\alpha + b\dot{\alpha}^2cos\alpha)\vec{y}_0\ ]$$

c) $\delta_{(A,\,1/RO)} = m\vec{V}_{(A)/Ro} \Lambda \vec{V}_{(G)/Ro} + \frac{d}{dt/Ro}\vec{\sigma}_{(A,\,1/RO)}$

$= m[-a\dot{\alpha}\vec{x}_1 \Lambda (b\dot{\alpha}\vec{x}_1 - a\dot{\alpha}\vec{x}_0)] + \frac{d}{dt/Ro}\left[ma\dot{\alpha}\left(\frac{a}{2} - b\cos\alpha\right]\vec{z}_0\right.$

$\delta_{(A,\,1/RO)} = m[-ab\dot{\alpha}^2(\vec{x}_0 \Lambda \vec{x}_1)] + \left[ma\ddot{\alpha}\left(\frac{a}{2} - b\cos\alpha\right) + ma\dot{\alpha}(+b\dot{\alpha}\sin\alpha\right]\vec{z}_0$

$\delta_{(A,\,1/RO)} = m[-ab\dot{\alpha}^2\vec{x}_0 \Lambda (\cos\alpha\,\vec{x}_0 + \sin\alpha\,\vec{y}_0)] + \left[ma\ddot{\alpha}\left(\frac{a}{2} - b\cos\alpha\right) + mab\dot{\alpha}^2\sin\alpha\right]\vec{z}_0$

$= m\left[-ab\dot{\alpha}^2\sin\alpha + a\ddot{\alpha}\left(\frac{a}{2} - b\cos\alpha\right) + ab\dot{\alpha}^2\sin\alpha\right]\vec{z}_0$

$$\delta_{(A,\,1/RO)} = ma\ddot{\alpha}\left(\frac{a}{2} - b\cos\alpha\right)\vec{z}_0$$

d) $\delta_{(A,\,1/RO)} = \delta_{(A,\,1/RO)} + \vec{IA} \Lambda m\vec{\Gamma}_{(G)RO}$

$= ma\ddot{\alpha}\left(\frac{a}{2} - b\cos\alpha\right)\vec{z}_0 + a\vec{y}_0 \Lambda m[(b\ddot{\alpha}\cos\alpha - b\dot{\alpha}^2\sin\alpha - a\ddot{\alpha})\vec{x}_0 + (b\ddot{\alpha}\sin\alpha + b\dot{\alpha}^2\cos\alpha)\vec{y}_0]$

$= ma\ddot{\alpha}\left(\frac{a}{2} - b\cos\alpha\right)\vec{z}_0 - am((b\ddot{\alpha}\cos\alpha - b\dot{\alpha}^2\sin\alpha - a\ddot{\alpha})\vec{z}_0$

$\delta_{(I,\,1/RO)} = ma\left[\ddot{\alpha}\left(\frac{a}{2} - b\cos\alpha\right) + a\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha}^2\sin\alpha - b\ddot{\alpha}\cos\alpha\right]\vec{z}_0$

$$\delta_{(I,\,1/RO)} = ma\left[\frac{3a}{2}\ddot{\alpha} - 2b\ddot{\alpha}\cos\alpha + b\dot{\alpha}^2\sin\alpha\right]\vec{z}_0$$

e) $\{D_{(1)}\}_{(I,RO)} = \left\{\begin{matrix} m(b\ddot{\alpha}\cos\alpha - b\dot{\alpha}^2\sin\alpha - a\ddot{\alpha}) \\ m(b\ddot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\alpha}^2\cos\alpha) \\ 0 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ ma(\frac{3a}{2}\ddot{\alpha} - 2b\ddot{\alpha}\cos\alpha + b\dot{\alpha}^2\sin\alpha) \end{matrix}\right\}$

6) $M_I pes/1 = M_G pes/1 + \vec{IG} \Lambda \vec{R}_{pes/1}$

$= \vec{0} + (\vec{IA} + \vec{AG}) \Lambda (-mg\vec{y}_0)$

$= (a\vec{y}_0 - b\vec{y}_1) \Lambda (-mg\vec{y}_0)$

$= bmg\,\vec{y}_1 \Lambda \vec{y}_0 = bmg\sin\alpha\vec{z}_0$

$\sum\{\tau_{Fest/1}\}_I = \left\{\begin{matrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ bmgsin\alpha \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} X \\ Y \\ 0 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} X \\ Y - mg \\ 0 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ bmgsin\alpha \end{matrix}\right\}$

6) $\{D_{(1)}\}_{(I,h)} = \{\sum \tau_{Fest/1}\}_I$

1 = 2

Donne :

X = $m(b\ddot{\alpha}\cos\alpha - b\dot{\alpha}^2\sin\alpha - a\ddot{\alpha})$

Y = $m(b\ddot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\alpha}^2\cos\alpha) + mg$

$ma(\frac{3a}{2}\ddot{\alpha} - 2b\ddot{\alpha}\cos\alpha + b\dot{\alpha}^2\sin\alpha)$ = bmg $\sin\alpha$

Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Nabeul

Département de Génie Mécanique

EXAMEN DE MECANIQUE GENERALE

Année universitaire : 2011/2012. Date : le /06/2012

Classe : GM 11+12+13+14+15+16. Nombre de pages : 4

Durée : 1 heure 30 mn. Documents : non autorisés.

Proposé par : M. Bouden& M. Kalleli &M. Amdouni& M. Jerbi

Dans cette épreuve, on s'intéresse à l'étude d'un amortisseur des vibrations de torsion à pendule excentré.

Un amortisseur pendulaire de torsion est utilisé pour atténuer les vibrations de torsion d'un rotor à une fréquence multiple de la fréquence de rotation du rotor. Il est constitué d'une ou plusieurs masses pendulaires montées sur un disque qu'on désire réduire ses vibrations. La figure 1 montre deux exemples de réalisation d'amortisseurs pendulaires.

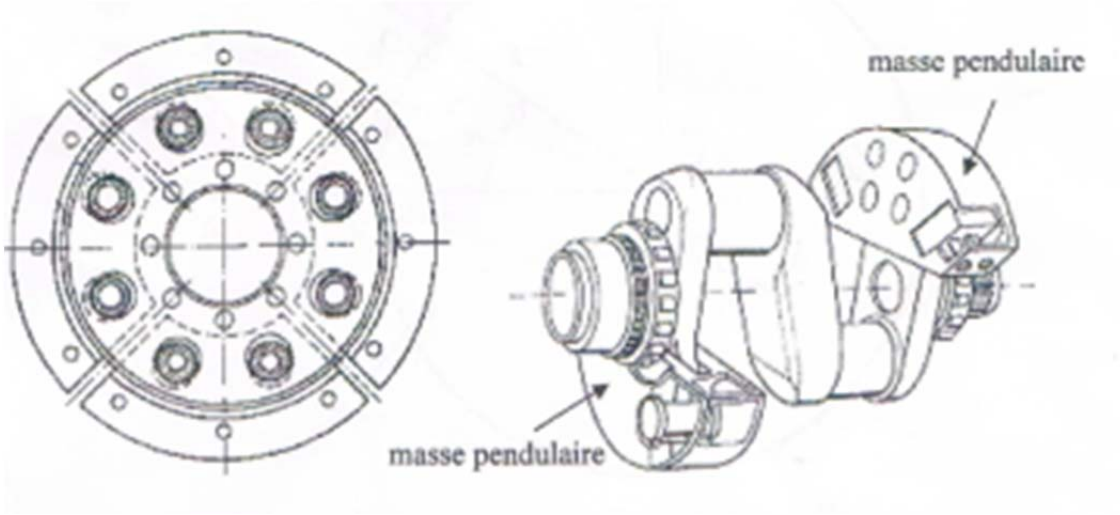


Figure 1 : exemples de réalisation d'amortisseurs pendulaires

La figure 2 présente le modèle utilisé pour l'étude cinématique et dynamique d'un amortisseur pendulaire.

Ce modèle est constitué d'un disque (1) de rayon R ayant une liaison pivot d'axe$(O, \vec{Z}_0)$ avec le bâti (0) et un pendule simple de masse concentré **m** , située au point $\mathbf{0_2}$, et suspendue autour du point $\mathbf{0_1}$ par une tige $\boldsymbol{O_1O_2}$ tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{O_1O_2}} = \boldsymbol{l\vec{x}_2}$ **.** La distance du point de

suspension $\boldsymbol{O_1}$ à l'axe de disque porteur est $\boldsymbol{R}$ tel que $\overrightarrow{OO_1} = R\,\vec{x}_1$. La liaison entre le disque et le pendule est une liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{Z}_0)$.

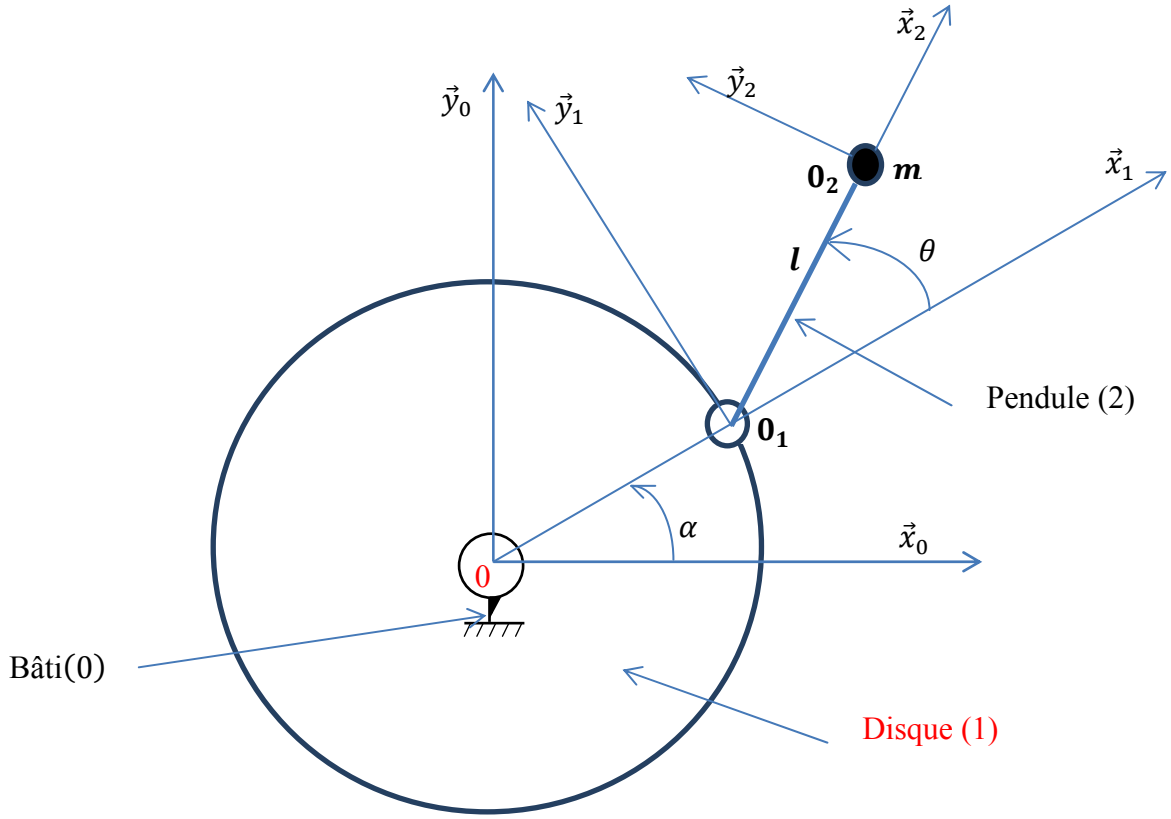
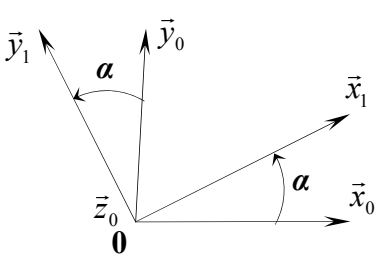
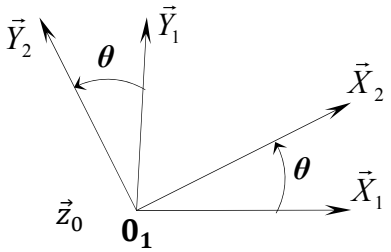


Figure 2 : Modèle d'un amortisseur des vibrations de torsion





Dans cette étude on a :

- Le repère $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère fixe lié au bâti (0)
- Le repère $R_1(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est un repère mobile lié au disque (1)
- Le repère $R_2(0_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est un repère mobile lié à la pendule (2)

Les deux paramètres cinématiques du système étudié sont les suivants :

- La rotation du disque par rapport au bâti $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- La rotation du pendule par rapport au disque $\theta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$

L'objectif de tout ce qui suit consiste à 'effectuer une étude dynamique du pendule dans le cas où le mouvement du disque est imposé.

La pendule **(2)** est constituée d'une tige de longueur $\boldsymbol{l}$ et de masse négligeable (non pesante) et d'une masse concentrée $\boldsymbol{m}$ en $\mathbf{0_2}$ **.**

Le point $\mathbf{0_2}$ est le centre de gravité (centre d'inertie) du pendule **(2).**

On donne :

$$\overrightarrow{OO_2} = R\,\vec{x}_1 + l\,\vec{x}_2$$

- L'expression du torseur de l'action de liaison du disque sur la tige au point $\mathbf{0_1}$ est **:**

$$\{\tau_{1/2}\}_{0_1} \begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

- La force de pesanteur du pendule est négligée dans toute l'étude

TRAVAIL DEMANDE :

1)Déterminer les vecteurs vitesses instantanées de rotation des mouvements relatifs $\overrightarrow{\Omega}_{(R_{1/R_0})}$, $\overrightarrow{\Omega}_{(R_{2/R_1})}$ et en déduire $\overrightarrow{\Omega}_{(R_{2/R_0})}$**.**

2)Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(O_2\epsilon 2/R_0)$ du point $\mathbf{0_2}$ dans le mouvement de **(2)** par rapport à R_0 .

3)En déduire l'expression du vecteur accélération $\vec{\Gamma}(O_2\epsilon 2/R_0)$**.**

4)Calcul du torseur cinétique

a) Déterminer l'expression de la résultante cinétique $\overrightarrow{R_C}(2/R_0)$ du pendule **(2)** dans son mouvement par rapport à R_0.

b) Déterminer, en utilisant le relation de transport des moments, l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(2/R_0)$ du mouvement de **(2)** par rapport à R_0, sachant que $\vec{\sigma}_{O_2}(2/R_0) = \vec{0}$.

c) Ecrire **dans le repère** R_1 le torseur cinétique au point O_1 du mouvement de **(2)** par rapport à R_0.

5)Calcul du torseur dynamique

a) Déterminer l'expression de la résultante dynamique $\vec{R}_d(2/R_0)$ du pendule **(2)** dans son mouvement par rapport à R_0.

b) Déterminer, en utilisant la relation de transport des moments, l'expression du moment dynamique $\vec{\delta}_{O_1}(2/R_0)$ du mouvement de **(2)** par rapport à R_0, sachant que $\vec{\delta}_{O_2}(2/R_0) = \vec{0}$.

c) Exprimer **dans le repère** R_1 , le torseur dynamique au point O_1 du mouvement de **(2)** par rapport à R_0 .

6)Appliquer le principe fondamental de la dynamique au pendule **(2)** et déterminer les inconnues de liaison $X_{1/2}$, $Y_{1/2}$, $Z_{1/2}$, $L_{1/2}$ **et** $M_{1/2}$ ainsi que l'équation de mouvement du pendule **(2)** dans son mouvement par rapport à R_0

Remarque : l'équation du mouvement du système est celle ne contenant pas d'inconnues statiques

BON TRAVAIL

CORRECTION EXAMEN DYNAMIQUE DE SOLIDES (JUIN 2012)

Travail demandé :

1) $\vec{\Omega}\,(R_1/R_0) = \dot{\alpha}\overrightarrow{zo}$

$\vec{\Omega}\,(R_2/R_1) = \dot{\theta}\overrightarrow{zo}$

$\Rightarrow \vec{\Omega}\,(R_2/R_0) = \vec{\Omega}\,(R_2/R_1) + \vec{\Omega}\,(R_1/R_0) = (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\,\vec{z}_0$

2) $\vec{V}(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,(\overrightarrow{00_2})\mathrm{R}_0$

$\Rightarrow \vec{V}(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{R}\overrightarrow{x_1} + \mathrm{l}\overrightarrow{x_2})$

$\Rightarrow \vec{V}(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0) = \mathrm{R}\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{dt}}/\mathrm{R}_1 + \vec{\Omega}R_1/R_0 \Lambda \overrightarrow{x_1}\right] + \mathrm{l}\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_2}{\mathrm{dt}}/\mathrm{R}_2 + \vec{\Omega}R_2/R_0 \Lambda \overrightarrow{x_2}\right]$

$\Rightarrow \vec{V}(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0) = \mathrm{R}\,[\vec{o} + \dot{\alpha} z_0 \Lambda \overrightarrow{x_1}] + \mathrm{l}\left[\vec{0} + (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) z_0 \Lambda \overrightarrow{x_2}\right]$

$\Rightarrow \vec{V}(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0) = \mathrm{R}\,\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + \mathrm{l}(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\overrightarrow{y_2}$

3) $\vec{\Gamma}(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0) = (\frac{d}{dt}\vec{V}(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0)R_0$

$\Rightarrow \vec{\Gamma}(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0) = \mathrm{R}\dot{\alpha}\,\frac{d\vec{y}_1}{dt}/R_0 + \mathrm{l}\,(\ddot{\alpha}+\ddot{\theta})\,\vec{y}_2 + \mathrm{l}(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\,\frac{d\vec{y}_2}{dt}/R_0$

Avec $\frac{d\vec{y}_1}{dt}/R_0 = \frac{d\vec{y}_1}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\,\Lambda\,\overrightarrow{y_1}$

$= \vec{0} + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \Lambda\,\vec{y}_1 = -\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1}$

$\frac{d\vec{y}_2}{dt}/R_0 = \frac{d\vec{y}_2}{dt}/R_2 + \vec{\Omega}(R_2/R_0)\,\Lambda\,\overrightarrow{y_2}$

$= \vec{0} + (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\,\vec{z}_0 \Lambda\,\vec{y}_2 = -(\dot{\alpha} + \dot{\alpha})\overrightarrow{x_2}$

D'où :

$\vec{\Gamma}(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0) = \mathrm{R}\ddot{\alpha}\vec{y}_1 - \mathrm{R}\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1} + \mathrm{l}\,(\ddot{\alpha}+\ddot{\theta})\,\vec{y}_2 - \mathrm{l}(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2\,\overrightarrow{x_2}$

4) a) $\overrightarrow{R_c}(2/R_0) = \mathrm{m}\,\vec{V}\,(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{R_c}(2/R_0) = \mathrm{m}(\mathrm{R}\,\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + \mathrm{l}(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\overrightarrow{y_2})$

$\boldsymbol{\Rightarrow \overrightarrow{R_c}(2/R_0) = \mathrm{m}\,\mathrm{R}\,\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + \mathrm{ml}(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\overrightarrow{y_2}}$

b) $\boldsymbol{\overrightarrow{\tau_{01}}(2/R_0) = \overrightarrow{\tau_{02}}(2/R_0) +} \mathrm{m}\,\vec{V}\,(0_2 \in 2/\mathrm{R}_0)\Lambda 0_2\overrightarrow{0_1}$

$\boldsymbol{\Rightarrow \overrightarrow{\tau_{01}}(2/R_0) = \vec{0} + (\mathrm{mR}\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + \mathrm{ml}((\dot{\alpha} + \dot{\theta})\overrightarrow{y_2})\,\Lambda\,(-\mathrm{l}\vec{x}_2)}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\tau_{01}}(2/R_0) = -mRl\ \dot{\alpha}\ (\overrightarrow{y_1} \Lambda \overrightarrow{x_2})\ ml^2\ (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\ (\overrightarrow{y_2} \Lambda \vec{x}_2)$

On a : $\overrightarrow{x_2} = \cos\theta\, \overrightarrow{x_1} + \sin\theta\, \overrightarrow{y_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\tau_{01}}(2/R_0) = mRl\dot{\alpha}\cos\overrightarrow{z_0} + ml^2\ (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\overrightarrow{z_0}$

D'où : $\overrightarrow{\tau_{01}}(2/R_0) = mRl\dot{\alpha}\cos\theta + ml^2\ (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\overrightarrow{z_0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{R_C}(2/R_0) = ml\ (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\sin\theta\overrightarrow{x_1} + \left[mR\dot{\alpha} + ml(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\cos\theta\right]\overrightarrow{y_1}$

$$\Rightarrow \{C(2/R_0\}_{01} = \begin{Bmatrix} -ml(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\sin\theta & 0 \\ mR\dot{\alpha} + ml(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\cos\theta & 0 \\ 0 & ml\left[R\dot{\alpha}\cos\theta + l(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\right] \end{Bmatrix} (\theta_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$$

5)

a) $\vec{R}_d(2/R_0) = m\vec{\Gamma}\ (0_2 \in 2/R_0)$

$\Rightarrow \vec{R}_d(2/R_0) = m\left\{R\ddot{\alpha}\vec{y}_1 - R\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1} + l(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})\overrightarrow{y_2} - l(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2\overrightarrow{x_2}\right\}$

$\Rightarrow \vec{R}_d(2/R_0) = mR\ddot{\alpha}\vec{y}_1 - mR\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1} + ml\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}\right)\overrightarrow{y_2} - ml\ (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2\overrightarrow{x_2}$

b) $\overrightarrow{\delta_{01}}\ (2/R_0) = \overrightarrow{\delta_{02}}\ (2/R_0) + m\ \vec{\Gamma}(0_2 \in 2/R_0)\Lambda\overrightarrow{0_2 0_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\delta_{01}}\ (2/R_0) = \vec{0} + \left[mR\ddot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - mR\dot{\alpha}^2\ \overrightarrow{\alpha_1} + mR(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})\overrightarrow{y_2} - ml(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2\overrightarrow{x_2}\right]\Lambda\ (-l\overrightarrow{x_2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{\delta_{01}}\ (2/R_0) = \vec{0} + -mRl\ddot{\alpha}(\overrightarrow{y_1} \Lambda \overrightarrow{x_2}) + mRl\dot{\alpha}^2(\overrightarrow{\alpha_1} \Lambda \overrightarrow{\alpha_2}) - ml^2\ (\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})\ \Lambda\ (\overrightarrow{y_1} \Lambda \overrightarrow{x_2})$

Avec $\overrightarrow{x_2} = \cos\theta\overrightarrow{x_1} + \sin\theta\overrightarrow{y_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\delta_{01}}\ (2/R_0) = mRl\ddot{\alpha}\cos\theta\overrightarrow{z_0} + mRl\dot{\alpha}^2\sin\theta\overrightarrow{z_0} + ml^2\ (\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})\ \overrightarrow{z_0})$

$\Rightarrow \overrightarrow{\delta_{01}}\ (2/R_0) = mRl\left[\ddot{\alpha}\cos\theta + \dot{\alpha}^2\sin\theta + \frac{l}{R}(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})\right]\vec{z}_0$

C) Exprimons la résultant dynamique $(\overrightarrow{R_d}(2/R_0)$ dans R_1

$\overrightarrow{y_2} = -\sin\overrightarrow{x_1} + \cos\theta\overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta\ \overrightarrow{x_1} + \sin\theta\overrightarrow{y_1}$

d'où:

$\vec{R}_d(2/R_0) = mR\ddot{\alpha}\vec{y}_1 - mR\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1} + ml\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}\right)[-\sin\theta\overrightarrow{x_1} + \cos\theta\overrightarrow{y_1}] - ml\ (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2\ [\cos\theta\overrightarrow{x_1} + \sin\theta\ \overrightarrow{y_1}]$

$\Rightarrow \vec{R}_d(2/R_0) = \left[-mR\dot{\alpha}^2 - ml\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}\right)\sin\theta - ml(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2\cos\right]\overrightarrow{x_1} + \left[mR\ddot{\alpha} + ml(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})\cos\theta - ml\ (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2\sin\theta\right]\overrightarrow{y_1}$

$$\Rightarrow \{d(2/R_0\}01 = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(0_2 \in 2/R_0 \\ \overrightarrow{\delta_{01}}(2/R_0) \end{Bmatrix} \theta_1$$

$$= \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{mR\dot{\alpha}^2} - \mathbf{ml}\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\theta}\right)\mathbf{sin\theta} - \mathbf{ml}(\dot{\alpha}+\dot{\theta})^2\cos\theta & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{mR\ddot{\alpha}} - \mathbf{ml}\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\theta}\right)\mathbf{cos\theta} - \mathbf{ml}(\dot{\alpha}+\dot{\theta})^2\sin\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{mRl}\left[\ddot{\alpha}\mathbf{cos\theta} + \dot{\alpha}^2\mathbf{sin\theta} + \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{R}}(\ddot{\alpha}+\ddot{\theta})\right] \end{Bmatrix}$$

$(\boldsymbol{\theta_1}, \vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{y}}_1, \vec{\boldsymbol{z}}_0)$

5) PFD appliqué au mvt de (2)% Ro

$\{\boldsymbol{\tau s}\ (\overline{\mathbf{2}} \to \mathbf{2})\}(\boldsymbol{\theta_1}, \vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{y}}_1, \vec{\boldsymbol{z}}_0) = \{\boldsymbol{D2/R_0}\}(\boldsymbol{\theta_1}, \vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{y}}_1, \vec{\boldsymbol{z}}_0)$

Avec $\{\boldsymbol{\tau s}\ (\overline{\mathbf{2}} \to \mathbf{2})\}_{\theta 1} = \{\boldsymbol{\tau s}\}_{\theta 1} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{Xy_2} & \boldsymbol{L_{1/2}} \\ \boldsymbol{Y_{1/2}} & \boldsymbol{M_{1/2}} \\ \boldsymbol{Z_{1/2}} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}(\boldsymbol{\theta_1}, \vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{y}}_1, \vec{\boldsymbol{z}}_0)$

$\Rightarrow \{\boldsymbol{\tau s}\ (\overline{\mathbf{2}} \to \mathbf{2})\}\ (\boldsymbol{\theta_1}, \vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{y}}_1, \vec{\boldsymbol{z}}_0)$projeté dans (R1) $= \left\{\frac{\boldsymbol{D2}}{\boldsymbol{R_0}}\right\}(\boldsymbol{\theta_1}, \vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{y}}_1, \vec{\boldsymbol{z}}_0)$projeté dans (R1)

On obtient par la suite le système d'équation s :

L'expression des inconnues statiques de liaison :

$X_{1/2} = -\,\mathrm{mR}\dot{\alpha}^2 - ml(\ddot{\alpha}+\ddot{\theta})\sin\theta - ml(\dot{\alpha}+\dot{\theta})^2\cos\theta$

$y_{1/2} = \mathrm{mR}\ddot{\alpha} + ml(\ddot{\alpha}+\ddot{\theta})\cos\theta - ml(\dot{\alpha}+\dot{\theta})^2\sin\theta$

$Z_{1/2} = 0$

$L_{1/2} = 0$

$M_{1/2} = 0$

L'équation de mvt du système

$0 = \mathrm{mRl}\left[\boldsymbol{\ddot{\alpha}cos\ddot{\theta}} + \boldsymbol{\dot{\alpha}^2\,sin\theta} + \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{R}}(\ddot{\alpha}+\ddot{\theta})\right]$