INSTITUT SUPERIEUR DES ETUDES TECHNOLOGIQUES DE NABEUL

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

TRAVAUX DIRIGÉS DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Torseurs

Niveau : L1/S1

2

EXERCICE 1 :

On considère trois vecteurs glissants définis par un point de leur support et leur vecteur libre :

$A_1\,(2,1,3)_R$; $A_2\,(1,1,5)_R$; $A_3\,(0,2,0)_R$

$$\vec{V}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ m \\ 2m \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} 3m \\ m \\ m \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -m \\ 2 \end{vmatrix}$$

1) quels sont les éléments de réduction en O, origine du repère, du torseur associé à cet ensemble de vecteurs glissants ?
2) calculer l'invariant scalaire. Montrer qu'il existe deux valeurs de m telles que cet invariant soit nul.
3) Existe-il une valeur de m (si oui, la calculer) pour laquelle le torseur se réduit à un couple ?

EXERCICE 2 (corrigé) :

A/ soit les vecteurs forces $\vec{F}_A = (0, Y_A, 0)$; $\vec{F}_B = (0, Y_B, Z_B)$ et $\vec{F}_C = (X_C, Y_C, Z_C)$ appliqués à un solide aux points A= (a, 0 ,0), B (0, b, 0) et C (0, 0, c) dans un repère $R\,(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

1) Ecrivez le torseur de chaque force à son point d'application.
2) En déduire le torseur de chaque force en O.
3) Donner le torseur équivalent à la somme.

B/ soit les vecteurs forces $\vec{F}_A = (X_A, Y_A, Z_A)$ et $\vec{F}_B = (X_B, Y_B, 0)$ appliqués à un solide aux points A= (a, b, 0) et B (-c, b, 4d) dans un repère R (O, $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$)

1) écrivez le torseur $\{\tau_A\}$ et $\{\tau_B\}$ en leurs point puis en O.

2) calculer la somme de deux torseurs.

3) calculer le comoment de deux torseurs $\{\tau_A\}$ et $\{\tau_B\}$.

CORRECTION

EXERCICE 2 :

1) Expressions des torseurs de chaque force à leurs points d'application :

$$\{T_1\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T_2\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T_3\}_C = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}$$

2) Transfert des torseurs au point O :

- $\vec{M}_O\left(\vec{F}_A\right) = \vec{M}_A\left(\vec{F}_A\right) + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A$

$$= \vec{0} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_A\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ aY_A \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{T_1\}_{A\to O} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & aY_A \end{Bmatrix}$$

- $\vec{M}_O\left(\vec{F}_B\right) = \vec{M}_B\left(\vec{F}_B\right) + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B$

$$= \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_B\right) = \begin{pmatrix} bZ_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{T_2\}_{B\to O} = \begin{Bmatrix} 0 & bZ_B \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}$$

- $\vec{M}_O\left(\vec{F}_C\right) = \vec{M}_C\left(\vec{F}_C\right) + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F}_C$

$$= \vec{0} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_C\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -cZ_C \\ cY_C \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{T_3\}_{C\to O} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & -cZ_C \\ Z_C & cY_C \end{Bmatrix}$$

3) Le torseur équivalent à la somme :

$$\{T\}_O = \{T_1\}_O + \{T_2\}_O + \{T_3\}_O$$

$$\{T\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & aY_A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & bZ_B \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & -cZ_C \\ Z_C & cY_C \end{Bmatrix}$$

$$\{T\}_O = \begin{Bmatrix} X_C & bZ_B \\ Y_A + Y_B + Y_C & -cZ_C \\ Z_B + Z_C & aY_A + cY_C \end{Bmatrix}$$

B.

1)

- les torseurs en leurs points :

$$\{\tau_A\}_A = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\tau_B\}_B = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

- Transfert au point O :

$$\{\tau_A\}_O = \begin{Bmatrix} X_A & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = & bZ_A \\ Y_A & & -aZ_A \\ Z_A & & aY_A - bX_A \end{Bmatrix}$$

$$\{\tau_B\}_O = \begin{Bmatrix} X_B & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ b \\ 4d \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = & bZ_B - 4dY_B \\ Y_B & & cZ_B + 4dX_B \\ 0 & & -cY_B - bX_B \end{Bmatrix}$$