INSTITUT SUPERIEUR DES ETUDES TECHNOLOGIQUES DE NABEUL
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

TRAVAUX DIRIGÉS DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Cinématique

Niveau : L1/S1

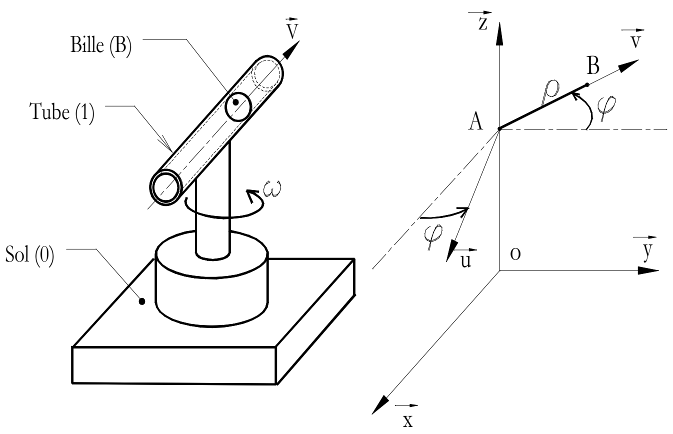
EXERCICE 1(Corrigé) :

On défini par :

- R_0 (O, x, y, z) Un repère de référence Lié au sol .
- R1 (A, u, v, z) un repère lié au tube.

Point B caractérise la bille.

ω : Vitesse angulaire du repère R_1/R_0



La bille glisse dans le tube à la vitesse $\vec{V}$

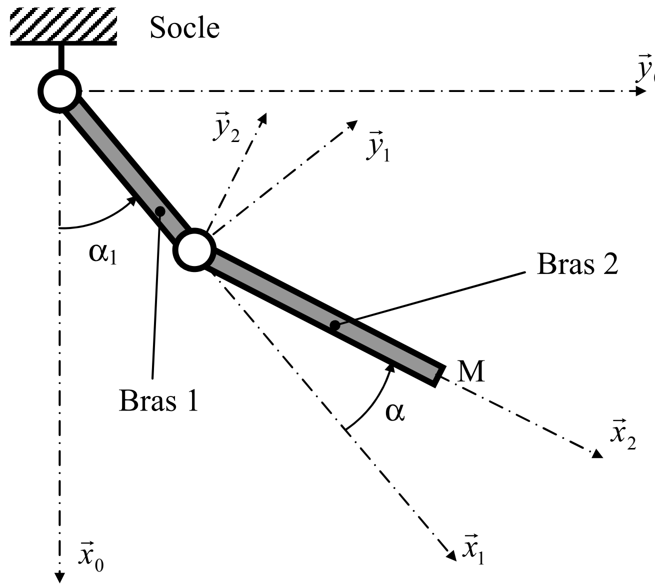
Le tube tourne à la vitesse angulaire ; Calculons la vitesse de la bille / au sol $\vec{V}(B/R0)$ et l'accélération de B / sol $\vec{\gamma}(B/R_0)$

EXERCICE 2 (Corrigé):

Considérons un robot constitué d'un socle **0** et de deux bras **1** et **2**. (Voir figure1)

Soit les repères :

- R_0 $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe lié au socle **0**
- R_1 $(0_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ repère lié au bras **1**
- R_2 $(0_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ repère lié au bras **2**



On donne :

$$\overrightarrow{00_1} = l_1\ \vec{x}_1\ ;\ \overrightarrow{0_1M} = l_2\ \vec{x}_2$$

$$\alpha_1(t) = (\vec{x}_0 \hat{,} \vec{x}_1) \quad ; \quad \alpha_2(t) = (\vec{x}_1 \hat{,} \vec{x}_2)$$

1) Calculer $\vec{\omega}$ (R_1/R_0) et $\vec{\omega}$ (R_2/R_0).

2) Calculer $\vec{V}(M/R_0)$ par composition des vitesses , avec :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(0_1/R_0) + \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{0_1M}$$

3) Calculer $\vec{\gamma}(M/R_0)$.

EXERCICE 3(Corrigé) :

On considère le mouvement d'un vérin hydraulique composé d'un corps **1** de longueur constante L et d'une tige mobile **2**. La course de **2** par rapport à **1** est définie par $\overrightarrow{AB} = x(t)\ \vec{x}$.

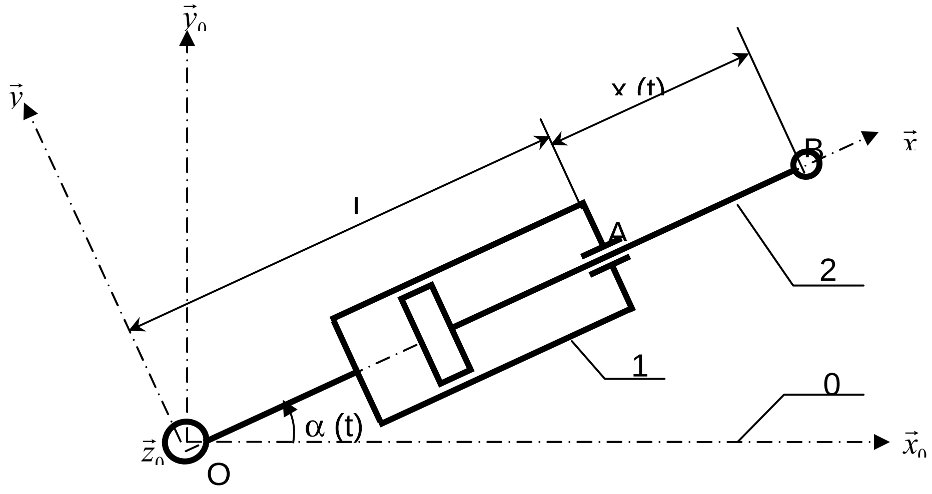
La rotation du vérin est définie par l'angle $\alpha(t) = \left(\vec{x}_0 \hat{,} \vec{x}\right)$ porté par $\vec{z}_0$.

On appelle : $\Re_0 = (0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère fixe lié au bâti **0**.

$\Re = (0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ le repère mobile lié au vérin.

$\overrightarrow{OB} = (L + x(t))\ \vec{x}$

L : Constante



1) Quelles sont les composantes dans $\Re$ du vecteur rotation $\vec{\omega}_{R/R_0} = \vec{\omega}\ (1/0)$?

2) Exprimez dans $\Re$ les composantes des vitesses $\vec{V}$ (B 2/1) et $\vec{V}$ (B 2/0)

Exprimez dans $\Re$ les composantes des accélérations $\vec{\gamma}$ (B 2/1) et $\vec{\gamma}$ (B 2/0)

EXERCICE (4) :

La figure **1** représente le schéma cinématique minimal d'un mécanisme de transformation de mouvement. Il est composé des solides suivants :

- Bâti (0), lié au repère de référence $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Arbre d'entré (1), lié au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, il est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti (0).
- Roue (2), liée au repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, elle est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec l'arbre d'entré (1) et engrène au point B avec une couronne solidaire au bâti (0).
- Bielle (3), liée au repère $R_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$, elle est en liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$ avec la roue (2).
- Coulisseau (4), il est en liaison glissière d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti (0) et en liaison pivot d'axe $(D, \vec{z}_0)$ avec la bielle (3).

On donne : $\overrightarrow{OA} = a.\vec{x}_1$; $\overrightarrow{AB} = R.\vec{x}_1$; $\overrightarrow{AC} = R.\vec{x}_2 + c.\vec{z}_0$; $\overrightarrow{CD} = L.\vec{x}_3$ et $\overrightarrow{OD} = \lambda.\vec{x}_0 + c.\vec{z}_0$.

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) \ ; \ \beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \text{ et } \gamma = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$$

Les paramètres variables du mécanisme sont : α, β, γ et λ.

Travail demandé :

1- Donner les expressions des vecteurs vitesses de rotations : $\vec{\Omega}(1/0), \vec{\Omega}(2/1)$, $\vec{\Omega}(3/0)$ et $\vec{\Omega}(2/0)$.

2- Exprimer dans R_1, la vitesse du point A par rapport à R_0.

3- Exprimer dans R_2, la vitesse du point C par rapport à R_1.

4- Déterminer dans R_1, la vitesse du point C en passant par le point A, par rapport à R_0

En déduire $\vec{V}(B \in 2/0)$.

5- En appliquant la condition de roulement sans glissement au point B entre les solides (2) et (0) établir une relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$. Préciser alors le sens de rotation de (2) par rapport à (1).

6- Déterminer en fonction de $\dot{\lambda}$, la vitesse de D par rapport à R_0. Quel est donc au point D le torseur cinématique qui représente le mouvement de la bielle (3) par rapport au bati (0).

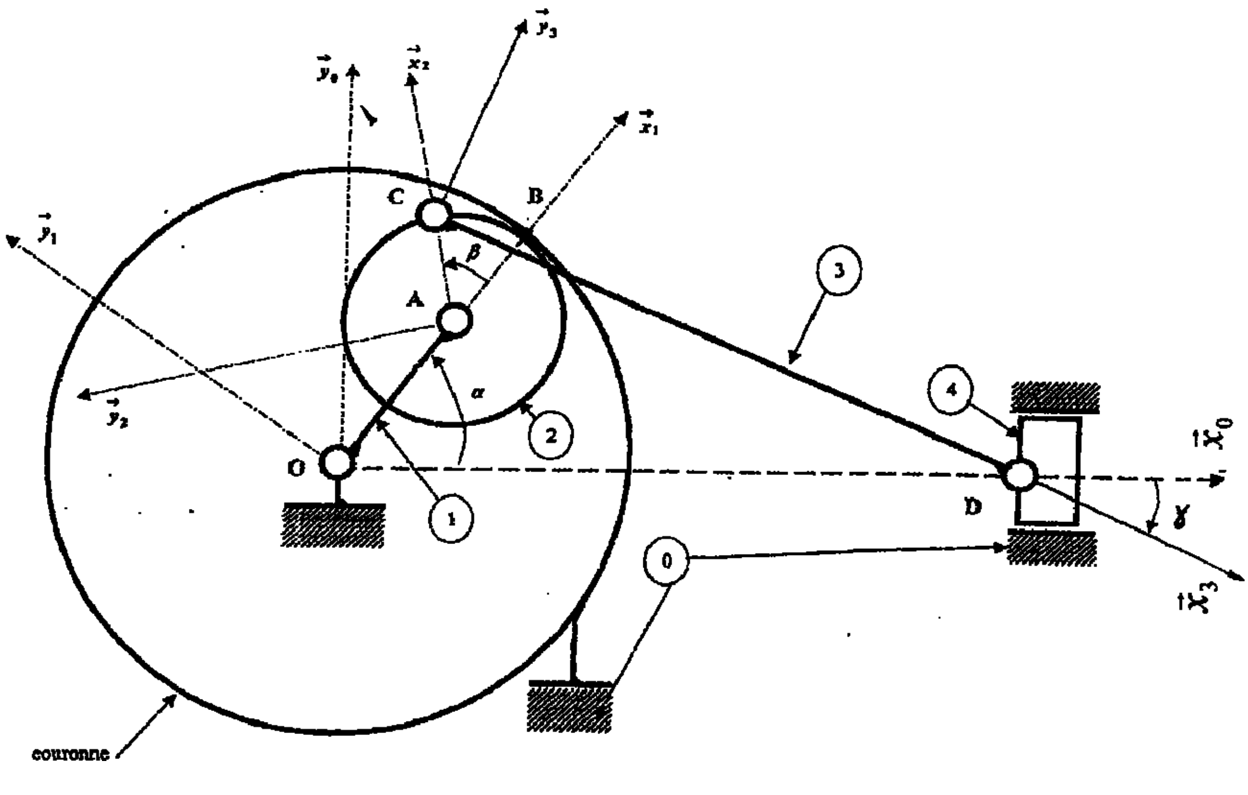


Figure 1 : Mécanisme de transformation de mouvement

EXERCICE (5) :

Les trains épicycloïdaux sont des réducteurs à engrenages à rapport de réduction très important pour un encombrement minimum.

Le pignon central (1) appelé planétaire est entraîné par un moteur (M) non représenté, il transmet son mouvement au pignon intermédiaire (2) (*satellite*) qui entraîne ensuite la couronne dentée (4) ou le porte satellite (3) suivant la vitesse choisie pour le récepteur. (Voir **fig. 2**)

***Données* :**

- Bâti (0), lié au repère de référence $R_0(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Planétaire (1), lié au repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$. Planétaire (1) de Rayon r_1.
- Satellite (2) lié au repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, $\psi = (\vec{x}_3, \vec{x}_2) = (\vec{y}_3, \vec{y}_2)$. Satellite (2) de rayon r_2.
- Porte satellite (3), lié au repère $R_3(O_1, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$, $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$. Porte satellite (3) de rayon r_3.
- Couronne (4), liée au repère $R_4(O_1, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$, $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$. Couronne (4) de rayon r_4.
- $\overrightarrow{O_1A} = r_1.\vec{x}_1$ si $A \in (1)$; $\overrightarrow{O_1A} = r_3.\vec{x}_3 - r_2 \cdot \vec{x}_2$ si $A \in (2)$.
- $\overrightarrow{O_1B} = r_3.\vec{x}_3 + r_2 \cdot \vec{x}_2$ si $B \in (2)$; $\overrightarrow{O_1B} = r_4.\vec{x}_4$ si $B \in (4)$.
- Les paramètres variables du mécanisme sont α, ψ, φ et θ.

***Travail demandé* :**

1- Déterminer les vitesses de rotations : $\vec{\omega}(1/0)$, $\vec{\omega}(2/3)$, $\vec{\omega}(3/0)$ et $\vec{\omega}(4/0)$.

2- En déduire $\vec{\omega}(1/3)$ et $\vec{\omega}(4/3)$.

3- Calculer la vitesse $\vec{V}(A \in 1/3)$.

4- Calculer la vitesse $\vec{V}(A \in 2/3)$.

5- En déduire la vitesse de glissement en A de (2/1).

6- Donner la relation entre $\omega(2/3)$ et $\omega(1/3)$ s'il y a roulement sans glissement en A.

7- Calculer la vitesse $\vec{V}(B \in 2/3)$.

8- Calculer la vitesse $\vec{V}(B \in 4/3)$.

9- En déduire la vitesse de glissement en B de (2/4).

10- Donner la relation entre $\omega(2/3)$ et $\omega(4/3)$ s'il y a roulement sans glissement en B.

11- Déduire la relation entre $\omega(1/3)$, $\omega(4/3)$.

12- Déterminer la relation entre $\omega(1/0)$, $\omega(3/0)$ et $\omega(4/0)$, (***formule de Willis***).

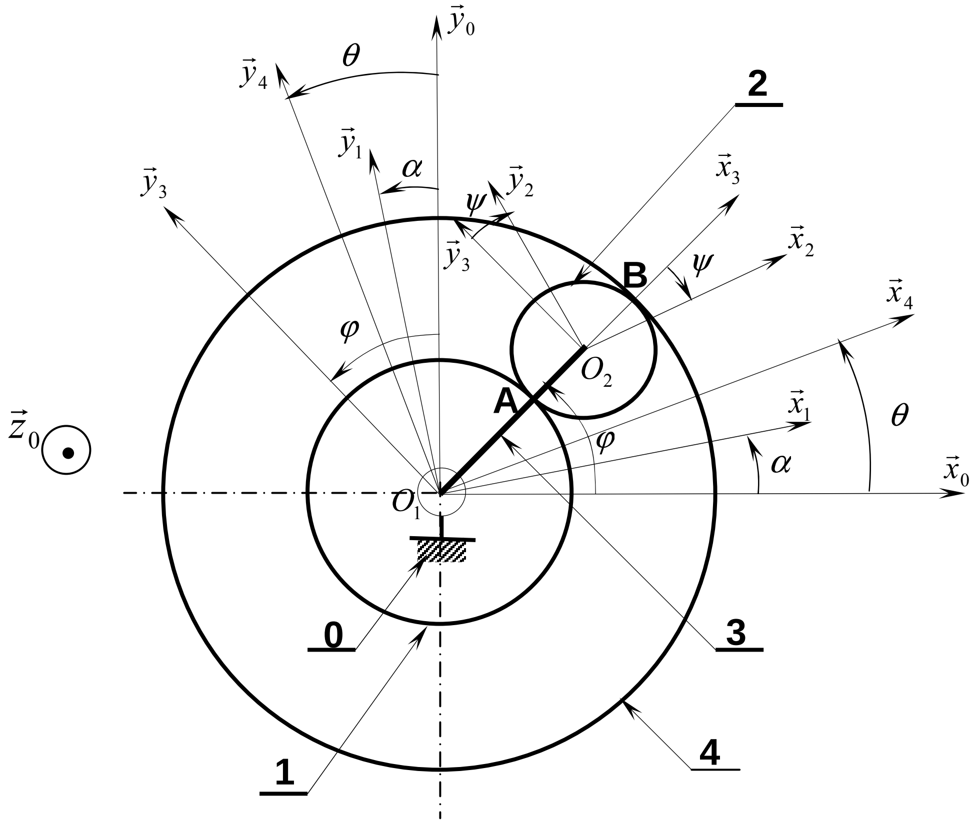


Figure 2 : Train épicycloïdal

EXERCICE (6) :

Le dispositif qu'on veut étudier est un vérin de relevage d'un poussoir qui est représenté par le schéma cinématique plan de la figure **3**. le poussoir **(5)**, en liaison glissière par rapport au bâti **(0)**, est entraîné en translation par le levier **(3)**, par l'intermédiaire du galet **(4)**.

Le galet **(4)** a une liaison pivot de centre C avec **(3)** et une liaison ponctuelle au point I avec **(5)**, dont la normale a même direction que l'axe de la liaison glissière entre **(5)** et **(0)**.

Le levier **(3)**, articulé en A au bâti **(0)**, est entraîné en rotation par la tige de vérin **(2)**, reliée au levier **(3)** par une liaison pivot de centre B.

La tige de vérin a un mouvement de translation par rapport au corps du vérin, articulé en O au bâti **(0).**

Repères et paramètres de position (Figure 4).

On considère les repères orthonormés directs suivants :

$R_0\left(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right)$: repère galiléen lié au bâti **(0)**.

$R_1\left(O,\vec{X}_1,\vec{Y}_1,\vec{Z}\right)$: lié au corps du vérin **(1)**.

$R_2\left(B,\vec{X}_1,\vec{Y}_1,\vec{Z}\right)$: lié à tige du vérin **(2)**.

$R_3\left(A,\vec{X}_3,\vec{Y}_3,\vec{Z}\right)$: lié au levier **(3)**.

$R_4\left(C,\vec{X}_4,\vec{Y}_4,\vec{Z}\right)$: lié au galet **(4)**.

$R_5\left(D,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right)$: lié au poussoir **(5)**.

α,β,γ : paramètres angulaires de position.

La position de la tige du vérin **(2)** est repérée par le paramètre λ tel que $\overrightarrow{OB} = \lambda.\vec{X}_1$

La position du poussoir **(5)** est repérée par le paramètre δ tel que $\overrightarrow{DH} = \delta.\vec{X}$

La position du point de contact I est tel que $\overrightarrow{IH} = \rho.\vec{Y}$

Le rayon du galet **(4)** est noté *r*.

$\overrightarrow{BG_2} = -b.\vec{X}_1$, $\overrightarrow{AC} = L.\vec{X}_3$ et $\boldsymbol{G_2}$: centre de masse de (2).

Travail demandé :

1- Donner les éléments de réduction des torseurs cinématiques suivants :
a.) $\left\{V_{1/0}\right\}_O$ **b.)** $\left\{V_{2/0}\right\}_{G_2}$ **c.)** $\left\{V_{3/0}\right\}_A$ **d.)** $\left\{V_{4/0}\right\}_C$

2- Donner l'expression, dans R_0, des vitesses suivantes.
a.) $\vec{V}(I\in 4/0)$ **b.)** $\vec{V}(I\in 5/0)$ **c.)** $\vec{V}(I\in 4/5)$

3-

a.) Quelle est la signification de $\vec{V}(I\in 4/5)$

b.) Que doit valoir la composante de $\vec{V}(I\in 4/5)$ selon $\vec{X}$? Justifier.

c.) En déduire $\dot{\delta}$ en fonction $\dot{\beta}$

4-

a.) Ecrire la condition de roulement sans glissement en ***I***

b.) En déduire $\dot{\gamma}$ en fonction $\dot{\beta}$

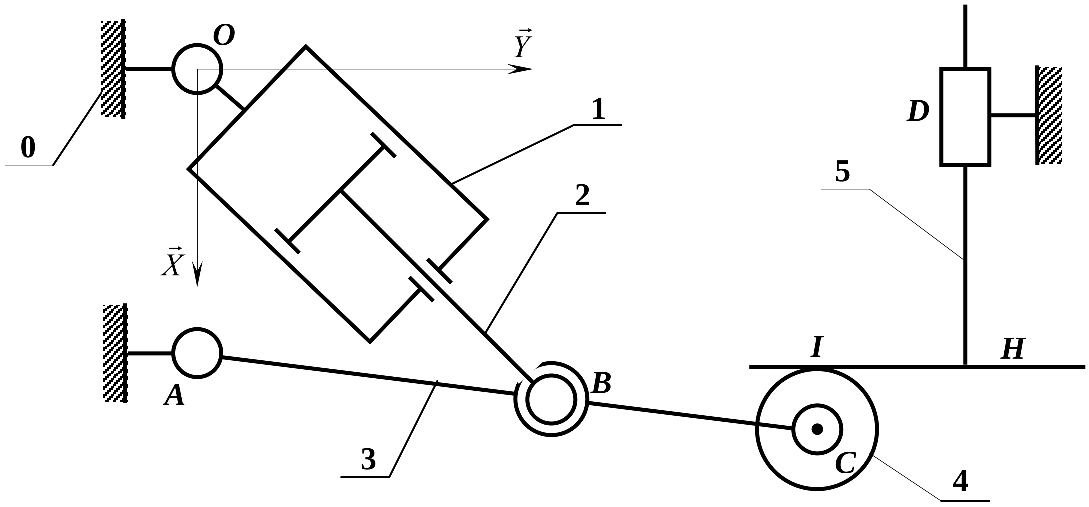


Figure 3 : schéma cinématique

CORRECTION

Exercice 1 :

$$\vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(B/R_1) + \vec{V}(B \in R_1/R_0)$$

$$* \ \vec{V}(B/R_1) = V\vec{v} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R1} = \left(\frac{d\rho\vec{v}}{dt}\right)_{R1} = \dot{\rho}\vec{v}$$

$$* \ \vec{V}(B \in R_1/R_0) = \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \dot{\theta}\vec{z} \wedge \rho\vec{v} = -\rho\dot{\theta}\vec{\mu}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{V}(B/R_0) = \dot{\rho}\vec{v} - \rho\dot{\theta}\vec{\mu}}$$

$$\vec{\gamma}(B/R_0) = \vec{\gamma}(B/R_1) + \vec{\gamma}(B \in R_1/R_0) + 2\vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(B/R_1)$$

$$* \ \vec{\gamma}(B/R_1) = \ddot{\rho}\vec{v} \qquad (\ M^{vt} \ \text{rectiligne}).$$

$$* \ \vec{\gamma}(B \in R_1/R_0) = -\rho\ddot{\theta}\vec{\mu} - \rho\dot{\theta}^2\vec{v}.$$

$$* \ 2\vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(B/R_1) = 2\dot{\theta}\vec{z} \wedge \dot{\rho}\vec{v} = -2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{\mu}$$

$$\vec{\gamma}(B/R_0) = \ddot{\rho}\vec{v} - \rho\ddot{\theta}\vec{\mu} - \rho\dot{\theta}^2\vec{v} - 2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{\mu}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(B/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{v} - (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{\mu}}$$

Exercice 2 :

1/

$$\vec{\omega}_{R1/R0} = \dot{\alpha}_1 \, \vec{z}_0$$

$$\vec{\omega}_{R2/R0} = \vec{\omega}_{R2/R1} + \vec{\omega}_{R1/R0} = \dot{\alpha}_2 \, \vec{z}_0 + \dot{\alpha}_1 \, \vec{z}_0 = (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_1)\, \vec{z}_0$$

2/

$$\vec{V}(_{M/R0}) = \vec{V}(_{M/R1}) + \vec{V}(_{O1/R0}) + \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M/R1)=\left.\frac{dO_1\vec{M}}{dt}\right]_{R1}=\left.\frac{d(l_2\vec{x}_2)}{dt}\right]_{R1}=l_2\,\dot{\alpha}_2\,\vec{y}_2$$

$$\vec{\omega}_{R1/R0}\wedge O_1\vec{M}=\dot{\alpha}_1\,\vec{z}_0\wedge l_2\,\vec{x}_2=\dot{\alpha}_1\,l_2\,\vec{y}_2$$

$$\vec{V}(_{M/R0})=l_2(\dot{\alpha}_1+\dot{\alpha}_2)\vec{y}_2+l_1\dot{\alpha}_1\vec{y}_1$$

3/

$$\vec{\gamma}(M/R0)=\left.\frac{d\vec{V}(M/R0)}{dt}\right]_{R0}=\left.\frac{d(l_2(\dot{\alpha}_1+\dot{\alpha}_2)\vec{y}_2+l_1\dot{\alpha}_1\vec{y})}{dt}\right]_{R0}$$

$$=l_2\left[(\ddot{\alpha}_1+\ddot{\alpha}_2)\vec{y}_2-(\dot{\alpha}_1+\dot{\alpha}_2)^2\vec{x}_2\right]+l_1\left[\ddot{\alpha}_1\vec{y}_1-\dot{\alpha}_1^{2}\vec{x}_1\right]$$

Exercice 3

1/

$$\vec{\omega}_{R/R0}=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$$

2/

$$\vec{V}(B/1)=\left.\frac{dA\vec{M}}{dt}\right]_{R1}=\left.\frac{d(x\,\vec{x}\,)}{dt}\right]_{R1}=\dot{x}\,\vec{x}$$

$$\vec{V}(B/0)=\left.\frac{dO\vec{B}}{dt}\right]_{R0}=\left.\frac{d(L+x)\vec{x}}{dt}\right]_{R0}=\dot{\alpha}(L+x)\,\vec{y}+\dot{x}\vec{x}$$

3/

$$\vec{\gamma}(B/1)=\left.\frac{d\vec{V}(B/1)}{dt}\right]_{R1}=\ddot{x}\,\vec{x}$$

$$\vec{\gamma}(M/_{R0})==\left[(L+x)\ddot{\alpha}+2\dot{\alpha}\,\dot{x}\right]\vec{y}+\left[\ddot{x}-\dot{\alpha}^{2}(L+x)\right]\vec{x}$$