Chapitre VI :

Flexion simple.

Objectifs	Déterminer la répartition des contraintes dans une section de poutre sollicitée à la flexion. Vérifier la condition de résistance pour une poutre sollicitée à la flexion. Dimensionner une poutre sollicitée à la flexion.
Pré-requis	Torseur de cohésion. Contrainte tangentielle.
Eléments de contenu	Etude des contraintes/ Déformation en flexion simple. Relation contrainte - moment de flexion. Conditions de résistance / de rigidité en flexion. Concentration de contrainte.

I. Introduction :

Une poutre est sollicitée en flexion simple lorsque toutes les forces appliquées à la poutre que ce soient les forces à distance ou les forces élémentaires de liaison sont perpendiculaires à la ligne moyenne, et soit situées dans le plan de symétrie, soit réparties symétriquement par rapport à celui-ci, ou concentrées en un point ou réparties suivant une loi.

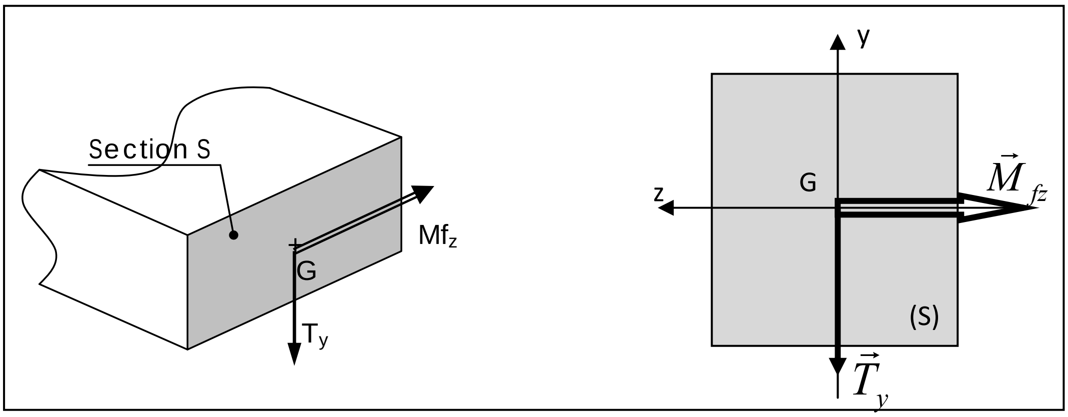

Figure 6.1: Modélisation des efforts extérieurs sur une poutre soumise à une flexion simple

Au cours de la déformation, les sections droites (constantes) restent planes et normales à la ligne moyenne.

La ligne moyenne de la poutre est rectiligne et confondue avec l'axe (o,x) .

Le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G, barycentre de la section droite S, à une résultante contenue dans le plan de la section et à un moment perpendiculaire à cette dernière.

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

II. Essai de flexion :

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale (figure 6.2).

Après déformation, cette poutre fléchit : On constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en traction.

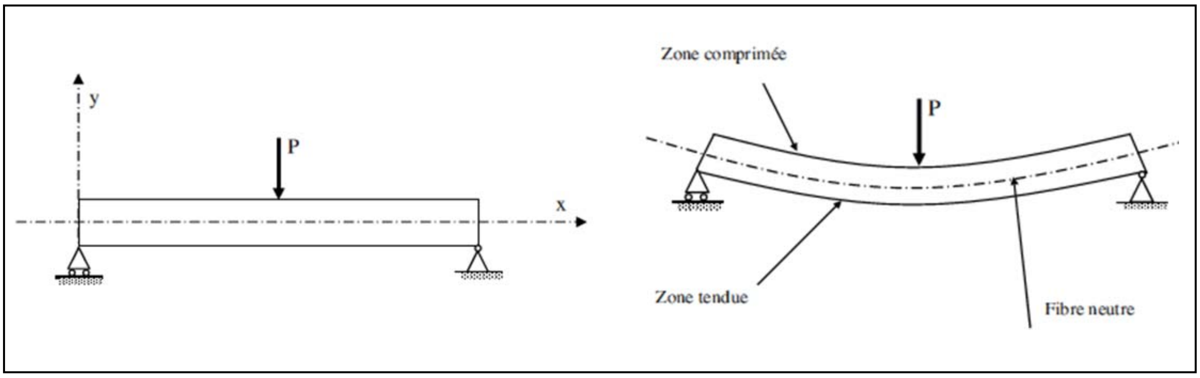

Figure 6.2: Modélisation d'un essai de flexion trois points.

Entre ces deux régions il existe une fibre qui reste ni tendue ni comprimée : la fibre neutre.

Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée.

III. Répartition des contraintes :

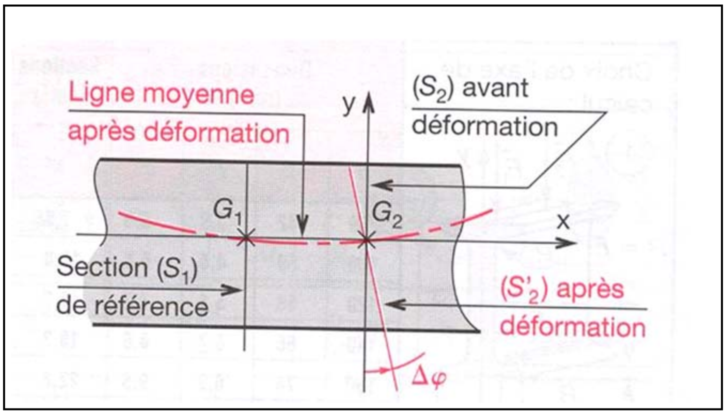

Figure 6.3: Définition de l'angle $\Delta\phi$ **.**

Lorsque la poutre fléchit (Figure 6.3), la section droite pivote d'un angle $\Delta\phi$

Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à la distance qui les sépare du plan des fibres moyennes, d'où : $\sigma_M = -E\theta y$

E : Module, d'Young [MPa]

Y : distance de M par raport à la fibre neutre [mm].

$\theta = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}$: Angle unitaire de flexion [rad/mm]

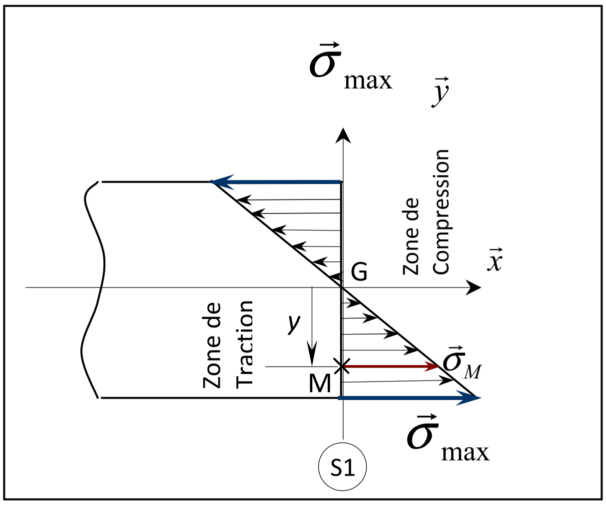

Figure 6.4: Répartition des contraintes dans une section droite .

Relation entre contrainte et moment fléchissant :

Le vecteur contrainte dans la section droite s'écrit :

$$\vec{C}(M,\vec{x}) = \sigma_x \vec{x} = -E\theta\, y\ \vec{x}$$

Le moment résultant du torseur de cohésion $\vec{M}_{fz} = M_{fz}\vec{z} = \int_S G\vec{M} \wedge \vec{C}(M,\vec{x})$

$G\vec{M} = y\vec{y} + z\vec{z}$, Il en résulte que : $M_{fz} = \int_S E\,\theta y^2\, dS = E\,\theta \int_S y^2\, dS$

Or $\sigma_x = -E\theta y \Rightarrow E\theta = -\dfrac{\sigma_x}{y}$ Donc : $M_{fz} = -\dfrac{\sigma_x}{y}\int_S y^2 dS = -\dfrac{\sigma_x}{y}.I_{GZ}$

Finalement $M_{fz} = -\dfrac{\sigma_x}{y} I_{GZ} \Rightarrow \sigma_x = -\dfrac{M_{fz}}{I_{GZ}} y$

Les contraintes maximales se développent dans les fibres les plus éloignées de la fibre neutre. :

$$|\sigma|_{max} = \frac{|Mf_{Gz}|_{max}}{\dfrac{I_{Gz}}{v}}$$

$v = |y|_{max}$: Ordonnée du point le plus éloigné de (G, $\vec{z}$) [mm].

$\dfrac{I_{Gz}}{v}$: Module de flexion de la section droite (S1).

σ_M : Contrainte normale de flexion en M [MPa]

IV. Condition de résistance à la flexion

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale due à la flexion doit rester inférieure à la résistance pratique à l'extension *Rpe*. On définit $Rpe = \dfrac{Re}{s}$

La condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma|_{max} \leq Rpe$$

Rpe: la résistance pratique à l'extension (MPa)
Re: la résistance élastique à l'extension du matériau (en Mpa)
s: coefficient de sécurité

V. Concentration de contraintes :

En tenant compte d'un éventuel coefficient k de concentration de contraintes, La condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma_{max}|_{eff} \leq R_{pe}$$

Les coefficients de concentration des contraintes K sont donnés à partir des abaques (Fig 6.5).

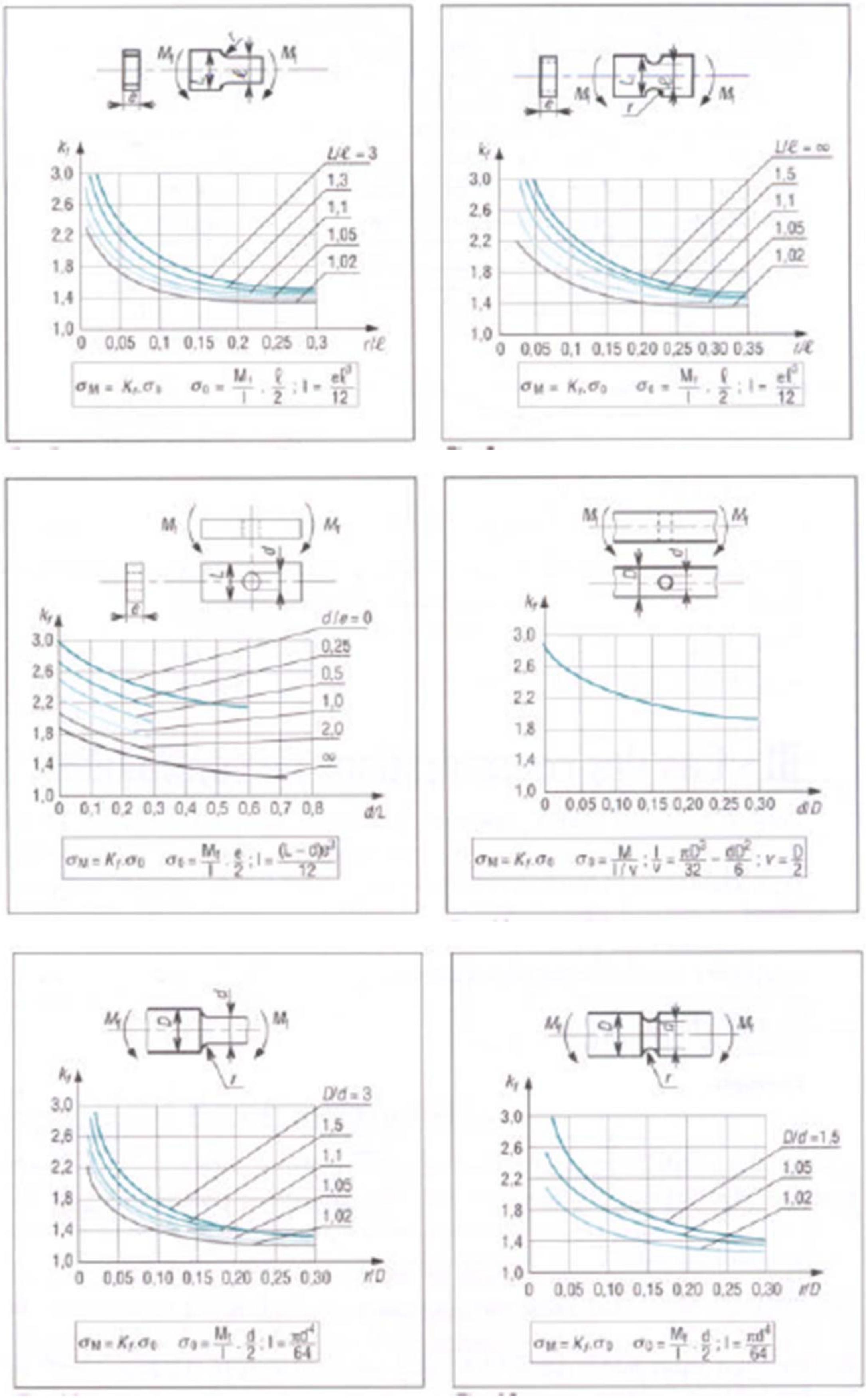

Figure 6.5: Coefficient de concentration de contraintes K en flexion simple.

VI. Déformation en flexion :

On appelle déformée, la courbe de la ligne moyenne de la poutre après déformation. L'équation de la déformée est: $y = f(x)$.

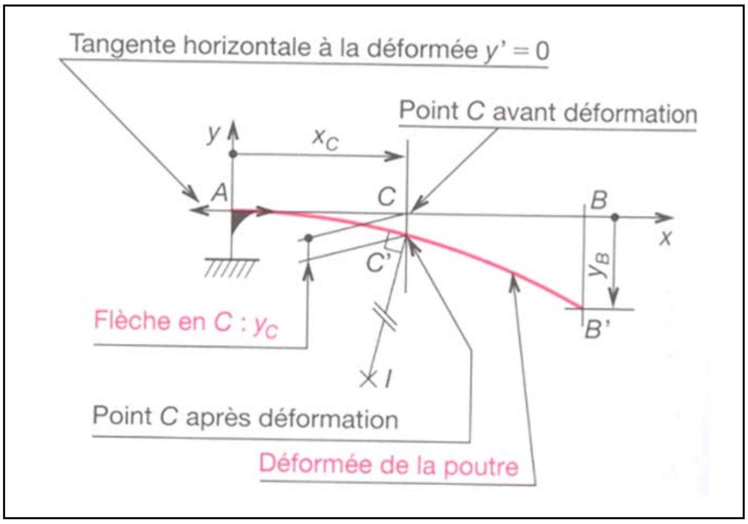

Figure 6.6: Définition de la déformée

y est la flèche au point d'abscisse x.
Les dérivées première et seconde sont notées y' et y".

Relation entre flèche et moment fléchissant

On peut calculer la flèche à partir de l'équation de la déformée déterminer par double intégration de l'équation du moment fléchissant. $EI_{GZ}y''(x) = -M_{fz}$

VII. Condition de rigidité en flexion :

On calcule la flèche maximale et on vérifie ensuite que cette flèche reste inférieure à une valeur limite f_{lim} $\boxed{y_{max} \leq f_{lim}}$