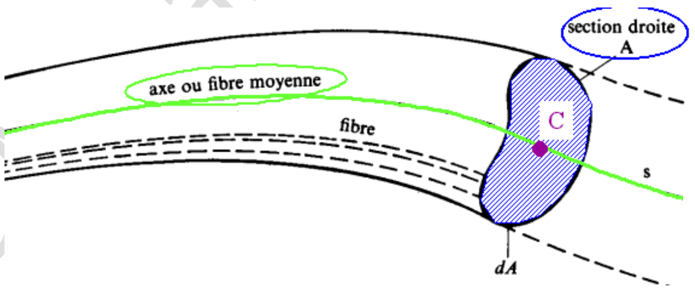
Chapitre 1 :

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS

1- Généralités et définitions :

Une poutre est un solide de volume engendré par une surface plane (S) dont le centre de gravité G décrit une courbe plane (C) appelée ligne (fibre ou axe) moyenne. Les caractéristiques de la poutre sont :

- Ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure.
- Section droite (S) constante ou variant progressivement.
- Le plan de (S) reste perpendiculaire à (C).
- La longueur de la ligne moyenne doit être supérieure ou égale à 10 fois la plus grande dimension de la section.
- Existence d'un plan de symétrie.
- Des points disposés de façon identique sur les sections droites jouissent de certaines propriétés communes, on dit qu'ils appartiennent à des fibres.
- La ligne ou, fibre moyenne, possède des propriétés particulières.
- La poutre est considérée droite si le plus petit rayon de courbure est supérieur ou égal à 6 fois la grande dimension de la section. Si non elle est courbe.

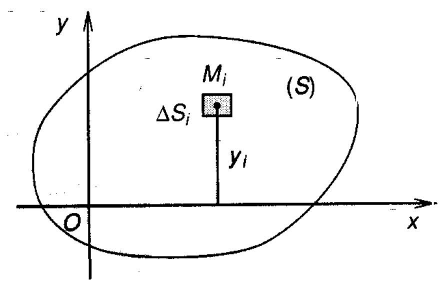


1- 2 Etude de la section transversale :

1-2-1 Moment statique :

1- 2-1-1 Définition :

Considérons une surface plane (S) et un repère orthonormé (O, x, y) de son plan.



Soit un point $M_i \in (S)$ de coordonnées (x_i, y_i) et ΔS_i une surface élémentaire de (S) entourant M_i. Le moment statique élémentaire de ΔS par rapport à Ox noté ΔW_{Ox} est défini par : $\Delta W_{Ox} = y_i \, . \, \Delta S_i$

et pour l'ensemble de la surface (S) : $$W_{Ox} = \sum_{(S)} y_i \, . \Delta S_i \qquad (1)$$

or nous savons que $y_G . S = \sum_{(S)} y_i \, . \Delta S_i$ donc : $W_{Ox} = y_G \, . \, S$ (2)

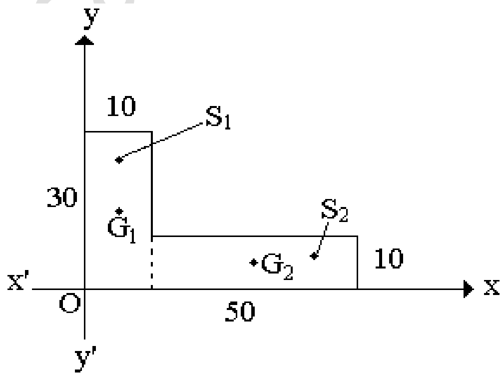
*** <u>Remarques :</u>**

- L'unité du moment statique est le cube de l'unité de longueur, en générale on utilise le millimètre cube (mm^3).
- 'y' étant algébrique peut être positif ou négatif ; un moment statique peut donc être positif, négatif ou nul.
- La relation (1) est rigoureusement valable lorsque ΔS est remplacé par une surface finie (S) et que la coordonnée (x ou y) correspondante est la coordonnée du centre de gravité de (S).

<u>1- 2-1-2 Exemples :</u>

a- Calculer le moment statique de la surface définie par la figure suivante par rapport à l'axe Ox de son plan.

b- Calculer les coordonnées du centre de gravité de la surface (S) définie par la figure suivante.



*** <u>Solution :</u>**

a- Nous pouvons décomposer (S) en deux surfaces finies (S_1) et (S_2) telles que :

$S_1 = 10 \times 30 = 300 \text{ mm}^2$; $S_2 = 10 \times 40 = 400 \text{ mm}^2$

$G_1 \begin{vmatrix} X_{G1} = 5 \\ Y_{G1} = 15 \end{vmatrix}$ et $G_2 \begin{vmatrix} X_{G2} = 30 \\ Y_{G2} = 5 \end{vmatrix}$

La relation (1) appliquée à (S) donne : $W_{Ox} = y_{G1} \, . \, S_1 + y_{G2} \, . \, S_2$

Application Numérique : $W_{Ox} = 6500 \text{ mm}^3$

b- soient (x_G, y_G) les coordonnées de G, centre de gravité de (S) dans le repère (O, x, y). D'après les relations (1) et (2) on a : $W_{Ox} = y_{G1} \cdot S_1 + y_{G2} \cdot S_2$ et $W_{Ox} = y_G \cdot S$

En égalant les seconds membres de ces deux expressions on trouve : $y_G = \dfrac{y_{G2} \cdot S_1 + y_{G2} \cdot S_2}{S}$

On trouverait de la même façon : W_{Oy} et x_G : $x_G = \dfrac{x_{G1} \cdot S_1 + x_{G2} \cdot S_2}{S}$

Application Numérique : $x_G \approx 19{,}3$ mm et $y_G \approx 9{,}3$ mm.

*** *Théorèmes :***

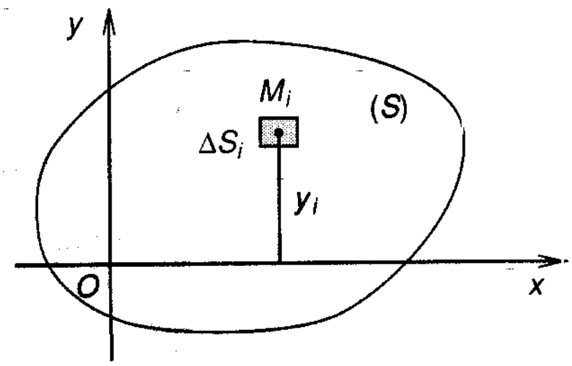
1- Le moment statique d'une surface plane par rapport à un axe Ox de son plan est égal au produit de l'aire de la surface par la coordonnée y_G du centre de gravité de cette surface.

2- Le moment statique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan passant par le centre de gravité de cette surface est nul.

1-2 -2 Moment quadratique :

1-2-2-1 Définition :

Considérons une surface plane (S) et un repère orthonormé (O, x, y) de son plan.



Soit un point $M_i \in (S)$ de coordonnées (x_i, y_i) et ΔS_i une surface élémentaire de (S) entourant M_i. Le moment quadratique élémentaire de ΔS_i par rapport à Ox noté ΔI_{Ox} est défini par :

$$\Delta I_{Ox} = y_i^2 \cdot \Delta S_i$$

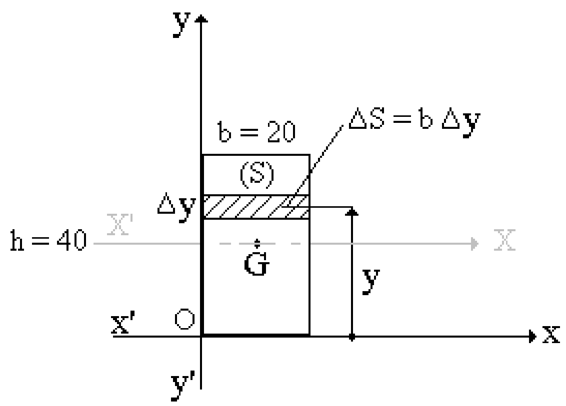
et pour l'ensemble de la surface (S) : $$I_{Ox} = \sum_{(S)} y_i^2 . \Delta S_i \qquad (3)$$

*** Remarques :**

- L'unité du moment quadratique est la puissance quatre de l'unité de longueur, en générale on utilise le millimètre cube (mm4).

- 'y' algébrique figure au carré dans la relation (3) ; un moment quadratique est donc toujours positif.

1-2-2-2 Exemple :



a- Calculer le moment quadratique de la surface (S) définie par la figure 2.5 par rapport à l'axe Ox, portant l'un de ses côtés.

b- Calculer le moment quadratique de cette même surface rectangulaire (S) par rapport à l'axe Gx parallèle à Ox et passant par G.

* **Solution :**

a- On a d'après la relation (3) : $\mathrm{I}_{\mathrm{Ox}} = \sum_{(\mathrm{S})} y_i^2 . \Delta S_i$

Dans ce cas particulier, la surface élémentaire ΔS peut se noter : ΔS = b.Δy

et $\mathrm{I}_{\mathrm{Ox}} = \mathrm{b} \sum_{y=0}^{y=h} y^2 . \ \Delta y$ tout calcul fait on trouve $\mathrm{I}_{\mathrm{Ox}} = \dfrac{\mathrm{bh}^3}{3}$