Chapitre 2

HYPOTHESE DES SOLLICITATIONS SIMPLE

2.1 Buts de la résistance des matériaux :

Trois buts principaux sont poursuivis en résistance des matériaux :

• La *connaissance des caractéristiques mécaniques* des matériaux et de leur comportement lorsqu'on modifie les conditions expérimentales.

• *L'étude de la résistance des pièces mécaniques* constitutives d'une machine on d'un édifice (pont, bâtiment, barrage, etc.) pour que ceux-ci supportent les efforts qui leur sont appliques dans les conditions requises de sécurité mais aussi dans de bonnes conditions économiques et d'esthétique industrielle.

• *L'étude de la déformation des pièces mécaniques.* En construction on ne tolère généralement qu'une très faible déformation, de sorte que le seuil de rupture n'est théoriquement jamais atteint.

2.2 Différents problèmes a résoudre :

2.2.1 Calcul de résistance :

Le calcul de résistance permet de déterminer toutes les dimensions d'une pièce, de telle façon qu'en aucun point de sa structure, les sollicitations internes ne dépassent une certaine limite. Cette limite est définie par les caractéristiques mécaniques des matériaux obtenues lors des essais.

2.2.2 Calcul de rigidité

Si l'on excepte le cas des ressorts dont le rôle est précisément de présenter une déformation élastique importante sous charge, la plupart des organes mécaniques doivent rester rigides. Sous l'influence des sollicitations extérieures, il convient le plus souvent que les déformations des pièces mécaniques restent faibles et de toute façon dans le domaine élastique. Citons le cas des arbres de transmissions pour lesquels on tolère La déformation angulaire inférieure on égale a un demi degré par mètre de longueur

Genie Mécanique - ISET Siliana

2.2.3 Calcul de vérification :

Lorsqu'on entreprend 1'étude d'une pièce mécanique, on doit au départ simplifier les formes de celle-ci et le plus souvent modéliser le système des forces extérieures qui lui sont appliquées.
La valeur de ces actions mécaniques sera recherchée en fonction des dimensions et du matériau de la pièce, mais aussi en fonction de sa déformation admissible.

2.2.4 Choix du matériau :

11 arrive que le problème est réciproque, connaissant les dimensions d'une pièce (conditions restrictives d'encombrement ou du poids), le calcul de résistance permet alors le choix du matériau approprié.

2.2.5 Hypothèses fondamentales :

2.2.5.1 Hypothèse sur le matériau :

Les matériaux sont homogènes et isotropes.
- Un corps est homogène lorsque tous les cristaux ou tous les grains de matières sont identiques : même constitution, même structure.
- Un solide est isotrope lorsque tous les points de sa structure ont les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions. Le bois n'est pas un matériau isotrope ; en effet, il est plus résistant dans le sens des fibres que dans le sens perpendiculaire aux fibres

2.2.5.2 Hypothèse sur la disposition de la matière :

la résistance des matériaux étudie seulement des solides dont les formes sont relativement simple (poutre).

2.2.5.3 La poutre :

On appelle poutre un solide engendre par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée ligne moyenne. Les caractéristiques de la poutre sont :
- Ligne moyenne droite ou a grand rayon de courbure
- La section droite (S) est constante on varie progressivement;
- Le plan de S reste perpendiculaire a (C) ;

Genie Mécanique - ISET Sliana

- Grande longueur par rapport aux dimensions transversales
- Existence d'un plan de symétrie

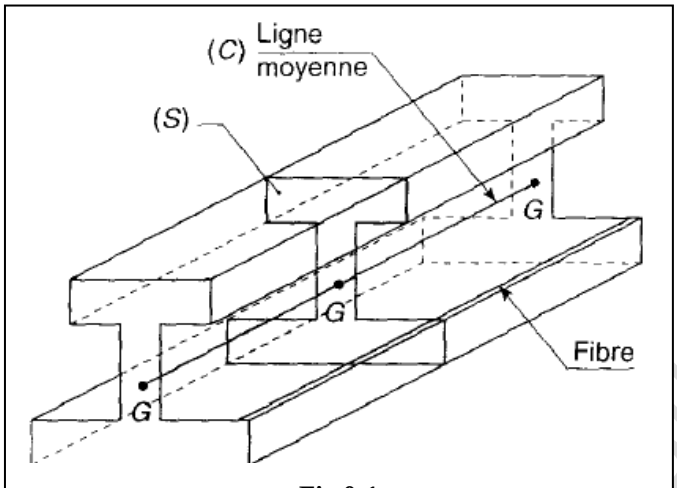
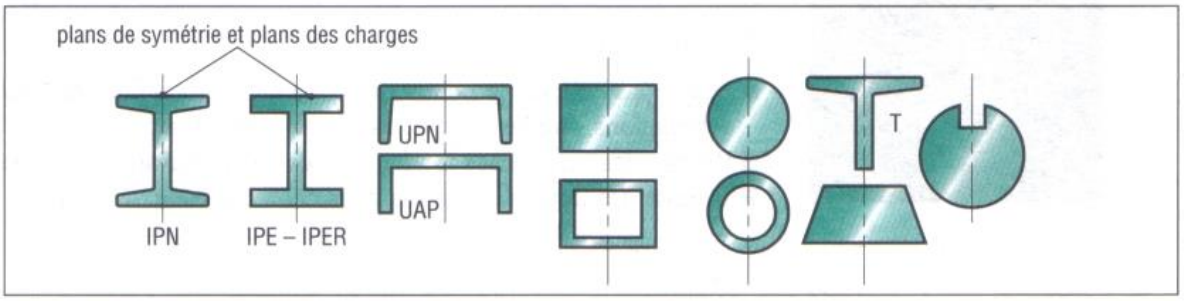
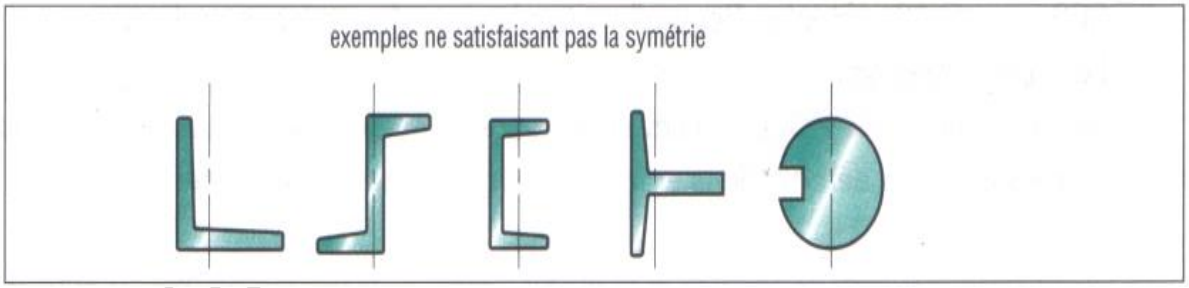


Fig 0-1





2.2.5.4 Hypothèse sur les forces extérieures :

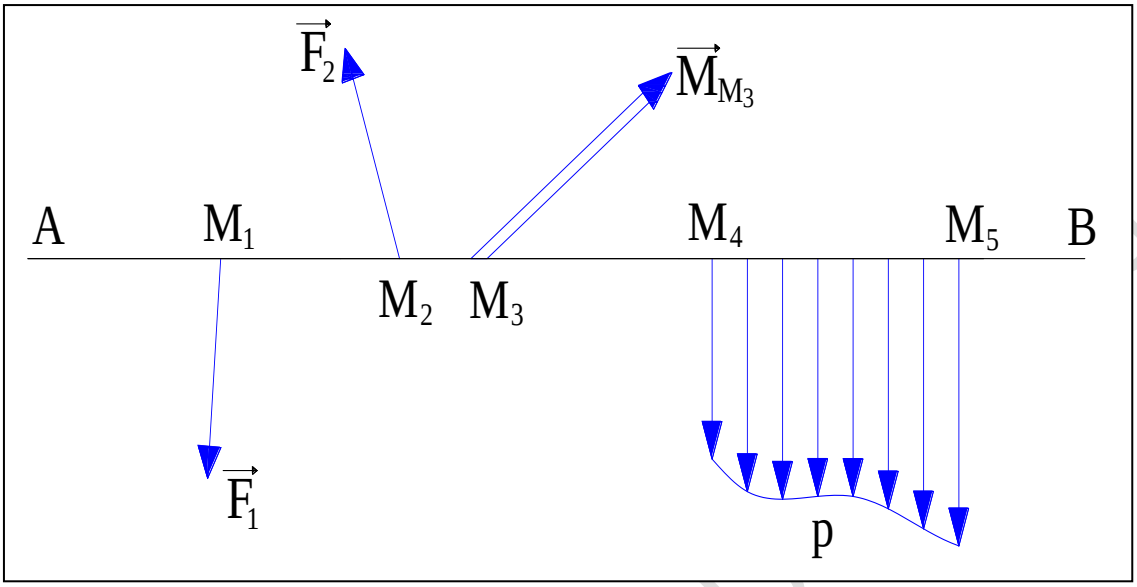
Toutes les forces extérieures exercées sur la poutre sont contenues dans le plan de symétrie ou alors disposées symétriquement par rapport a ce plan.

2.2.5.5 Types d'actions mécaniques extérieures.

Deux types d'actions mécaniques peuvent s'exercer sur la poutre

- Charges concentrées : (M_1, F_1), (M_2, F_2) on moments (M_{M3});

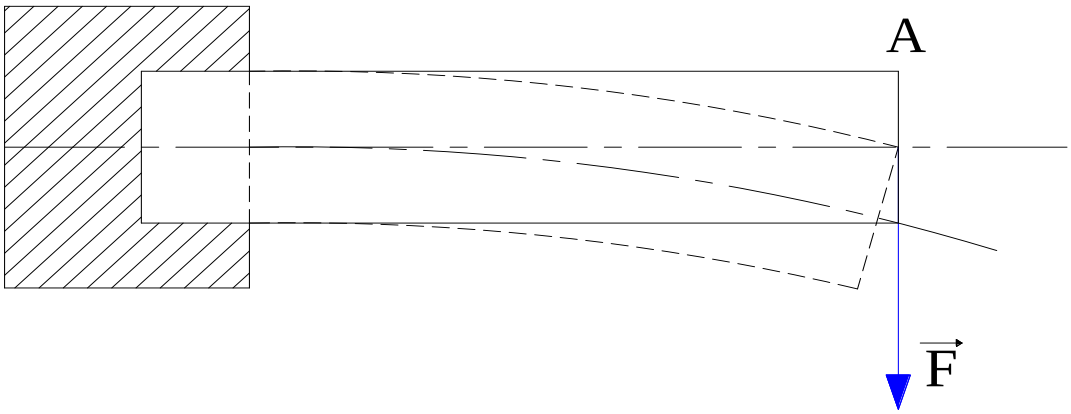
- Charges reparties sur M_4M_5 Cette charge est définie par sa densité linéique, ou coefficient de charge p, exprimée en newtons par mètre (N/m).



2.2.5.6 Hypothèse sur les déformations

a) Hypothèse de Navier Bernoulli :

Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation. On se place toujours dans le cas de petites déformations. Autrement dit, les déformations restent faibles comparativement aux dimensions de la poutre.



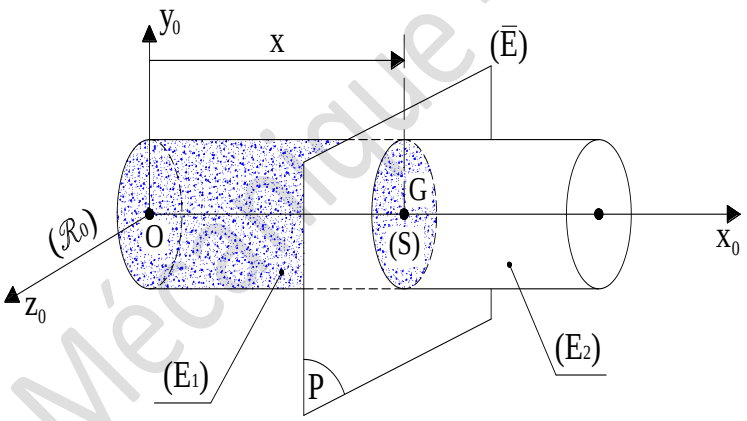
2.2.6 Définition du torseur associe aux efforts de cohésion dans une section droite

2.2.6.1 Définition et repérage de la coupure fictive

Soient (E) le solide assimilé a une poutre et (E) 1'ensemble extérieur a *(E)*

$R_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié a E. Considérons un plan (P) perpendiculaire a (O, $\vec{x}_0$) et soit (S) la section droite de (E) ainsi définie. Soit G, d'abscisse x, le centre de surface de (S). Dans R_0 le vecteur position $\vec{OG} = x\ \vec{x}_0$ définit la position de la section droite fictive (S).

La coupure fictive par le plan (P) partage la poutre (E) en deux tronçons *(E_1)* et (E_2).



2.2.6.2 Définition du torseur de cohésion

Les actions mécaniques que le tronçon (E_2) exerce sur (E_1) a travers la section droite fictive (S) sont des efforts intérieurs a la poutre *(E), peuvent être* modéliser par un torseur appelé torseur de cohésion $\{\Im_{coh}\}$ et exprimer ses éléments de réduction au point G centre de surface de (S) :

$$\{\Im_{coh}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$$

Genie Mécanique - ISET Siliana

2.2.6.3 Détermination des éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion

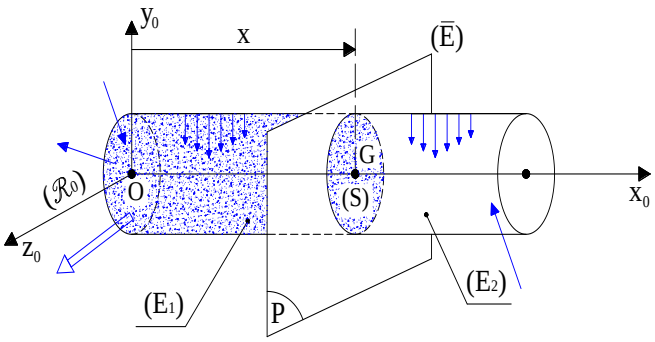
a) Etude de L'équilibre de la poutre (E)

La poutre *(E)* est soumise de la part de L 'ensemble ($\overline{E}$) a des actions mécaniques extérieures concentrées on reparties

Notons $\vec{R}(\overline{E} \to E)$ la résultante générale et $\vec{M}_G\ (\overline{E} \to E)$ le moment résultant au point G du torseur des actions mécaniques de *(* $\overline{E}$ *)* sur (E).

La poutre (E) étant en équilibre, le principe fondamental de la statique permet d'écrire

$$\{\mathfrak{T}\overline{E} \to E\} = \{\ \vec{0}\ \}$$



Ce qui entraîne au point

$$\left.\begin{cases} \vec{R}(\overline{E} \to E) = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\overline{E} \to E) = \vec{0} \end{cases}\right\}_G \quad \textbf{(1)}$$

En utilisant la notion de coupure fictive définie au paragraphe précèdent, les actions mécaniques de ($\overline{E}$) sur (E) peuvent être séparés en deux groupes• Le torseur des actions mécaniques extérieures à la poutre appliquées sur le tronçon (E_1) et réduit au point G.

$$\{\mathfrak{T}\overline{E} \to E_1\} = \left.\begin{cases} \vec{R}(\overline{E} \to E_1) = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\overline{E} \to E_1) = \vec{0} \end{cases}\right\}_G$$

Genie M. ISET Siliana

• Le torseur des actions mécaniques extérieures à la poutre appliquées sur le tronçon (E_2) et réduit au point G. $\{\Im\overline{E} \to E_2\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}(\overline{E} \to E_2) = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\overline{E} \to E_2) = \vec{0} \end{Bmatrix}$

Les équations (1) d'équilibre de la poutre (E) peuvent alors s'écrire

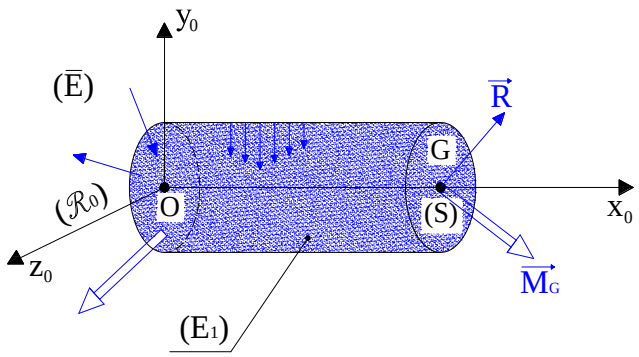
$$ {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}(\overline{E} \to E_1) + \vec{R}(\overline{E} \to E_2) = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\overline{E} \to E_1) + \vec{M}_G(\overline{E} \to E_2) = \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \textbf{(2)} $$

b) Relation entre le torseur des efforts extérieurs et le torseur des efforts de cohésion, sur un tronçon de poutre isole

Isolons le tronçon (E') Celui-ci est en équilibre sous l'action de deux torseurs d'actions mécaniques :

• Le torseur des actions mécaniques du milieu extérieur ($\overline{E}$) sur (E_1) réduit au point G

$$ \{\Im\overline{E} \to E_1\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}(\overline{E} \to E_1) \\ \vec{M}_G(\overline{E} \to E_1) \end{Bmatrix} $$



• Le torseur des actions mécaniques que le tronçon (E_2) exerce sur (E_1) à travers la section droite fictive (S)

$$ \{\tau_{coh}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix} $$

Appliquons à(E_1) le principe fondamental de la statique

$$ \{\Im\overline{E} \to E_1\} + \{\Im_{coh}\} = \{\vec{0}\} $$

Les équations d'équilibre du tronçon (E_1) s'écrivent donc en G

$$\left.\begin{cases}\vec{R}(\overline{E} \rightarrow E_1)+\vec{R}=\vec{0}\\ \vec{M}_G(\overline{E} \rightarrow E_1)+\vec{M}_G=\vec{0}\end{cases}\right\}_G \qquad \textbf{(3)}$$

Compte tenu des équations **(3)** et **(2)** ci-dessus, les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion peuvent donc s'exprimer de deux façons

Première écriture

$$\begin{cases}\vec{R}=-\vec{R}(\overline{E} \rightarrow E_1)\\ \vec{M}_G=-\vec{M}_G(\overline{E} \rightarrow E_1)\end{cases}_G \qquad \textbf{(4)}$$

Deuxième écriture

$$\begin{cases}\vec{R}=\vec{R}(\overline{E} \rightarrow E_2)\\ \vec{M}_G=\vec{M}_G(\overline{E} \rightarrow E_2)\end{cases}_G \qquad \textbf{(5)}$$

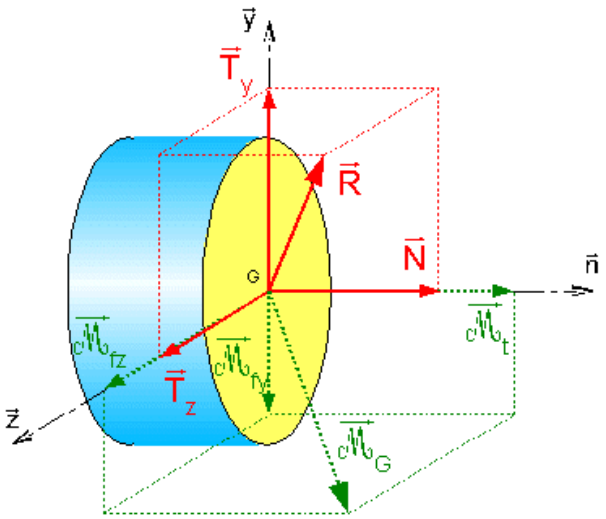
NOTA : La simplicité des calculs impose le choix de la relation (4) ou(5).

On conçoit qu en déplaçant le point G tout au long de la ligne moyenne de la poutre on peut Déterminer l'évolution des efforts de cohésion.

c) Composantes dans R des éléments de réduction du torseur de cohésion

$R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est appelé repère de définition des sollicitations et tel que $(G,\vec{x})$ définie la normale extérieures en G à S relative au tronçon E, Projetons sur les axes de R les vecteurs du $\{\tau_{coh}\}$

$$\{\Im_{coh}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M}_G\end{matrix}\right\}$$



Genie Mécanique - ISET Siliana

C – 1 : Définitions

- Effort normal $\vec{N}$: c'est la projection de $\vec{R}$ sur la normale extérieure $(G,\vec{x})$
- Effort tranchant $\vec{T}$: c'est la projection de $\vec{R}$ sur le plan de section droite $(G,\vec{y},\vec{z})$
- Moment de torsion $\vec{M}_t$: c'est la projection de $\vec{M}_G$ sur la normale extérieure $(G,\vec{x})$
- Moment de flexion $\vec{M}_f$: c'est la projection $\vec{M}_G$ de sur le plan de section droite

$(G,\vec{y},\vec{z})$ Par conséquent $\begin{cases} \vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{M}_G = \vec{M}_t + \vec{M}_f \end{cases}$

$\vec{R}$:
- N : composante algébrique de l'effort normal $\vec{N}$ sur $(G,\vec{x})$
- T_y composante algébrique de l'effort tranchant $\vec{T}$ sur $(G,\vec{y})$
- T_z: composante algébrique de l'effort tranchant $\vec{T}$ sur $(G,\vec{z})$

$\vec{M}_G$:
- M_t : composante algébrique du moment de torsion $\vec{M}_t$, sur $(G,\vec{x})$
- M_{fy} : composante algébrique du moment de flexion $\vec{M}_f$ sur $(G,\vec{y})$
- M_{fz}: composante algébrique du moment de flexion $\vec{M}_f$ sur $(G,\vec{z})$

Nous écrirons alors dans R.

$$\vec{R} = N\vec{x} + Ty\vec{y} + Tz\vec{z}$$
$$\vec{M}_G = M_t\vec{x} + M_{fy}\vec{y} + M_{fz}\vec{z}$$

C – 2 : Diagrammes

Les composantes algébriques N, T_y, T_z , M_t, M_{fy}., M_{fz}, varient en fonction de la position du centre de surface G de la section droite fictive (S). Le point G est défini par son abscisse *x* telle que : $\vec{OG} = x\vec{x}_0$

La représentation graphique des fonctions : N(x),T_y(x), T_z(x),M_t (x), M_{fy} (x) et M_{fz} (x) donne les diagrammes des composantes des éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion.

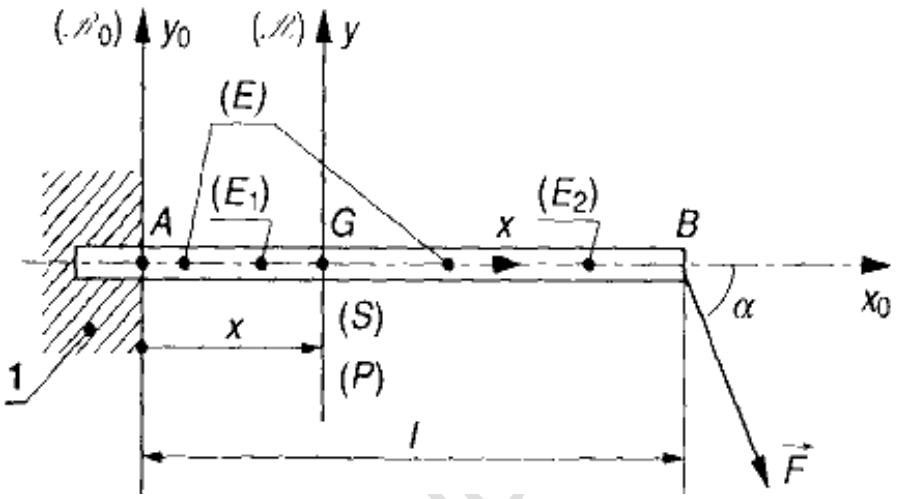
Notons que ces fonctions peuvent présenter des discontinuités, par exemple quand le plan (P) de (S) rencontre le point d'application d'une charge concentrée on un moment localisé.

Genie Mécanique - ISET Siliana

C – 3 : Application :

Soit une poutre droite (E) de section constante. de longueur l, encastrée a son extrémité .A et supportant à son extrémité B un effort concentre $\vec{F}$

Soit $R_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lie a la poutre, tel que l'axe(O, $\vec{x}_0$) soit confondu avec la ligne moyenne. On effectue une section droite fictive de la poutre par un plan (P). Soit G, d'abscisse x dans R_0, le centre de surface de cette section droite.



QUESTIONS

1° Isoler la poutre E et déterminer, au point A, les éléments de réduction du torseur associe à la liaison encastrement $\{\mathfrak{T}'(1 \to E)\}$

2° En utilisant les relations (4) puis les relations (5) ,déterminer les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion dans la section droite fictive d'abscisse x. .

3° Donner l'expression des composantes algébriques N(x), T_y(x), T_z(x), M_t (x), M_{fy} (x) et M_{fz} (x) des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion, dans le repère $R = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations.

4° Représenter la variation de ces composantes algébriques en fonction de l'abscisse x du centre de surface G de la section droite fictive.

Réponse :

1° $\{\Im'(1 \to E\ )\} = \begin{Bmatrix} -\|\vec{F}\|\cos\alpha & 0 \\ \|\vec{F}\|\sin\alpha & 0 \\ 0 & \|\vec{F}\| l \sin\alpha \end{Bmatrix}$

2° D'après les relations (4) $\begin{cases} \vec{R} = -\vec{R}(\overline{E} \to E_1) \\ \vec{M}_G = -\vec{M}_G(\overline{E} \to E_1) \end{cases}_G$ $\begin{cases} \vec{R} = -\vec{A}(1 \to E) \\ \vec{M}_G = -(\vec{M}_A + G\vec{A} \wedge \vec{A}(1 \to E)) \end{cases}_G$

Soit dans R_0 lié à la poutre $\begin{cases} \vec{R} = \|\vec{F}\|\cos\alpha\vec{x}_0 - \|\vec{F}\|\sin\alpha\vec{y}_0 \\ \vec{M}_G = -\|\vec{F}\|(l-x)\sin\alpha\vec{z}_0 \end{cases}_G$

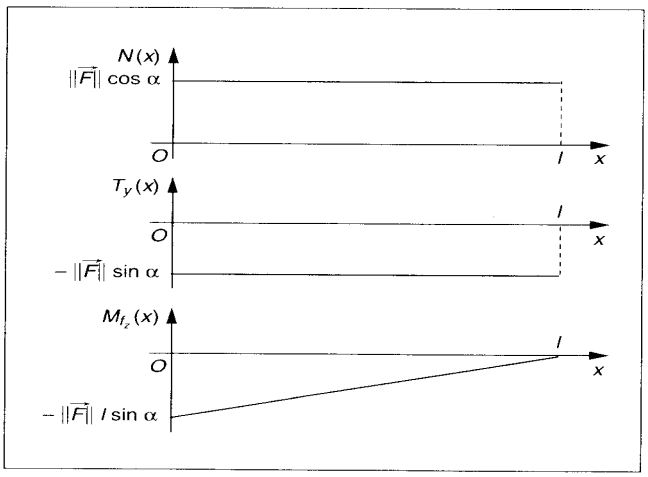
D'après les relations (5) $\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}(\overline{E} \to E_1) \\ \vec{M}_G = \vec{M}_G(\overline{E} \to E_1) \end{cases}_G$

$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F} \\ \vec{M}_G = G\vec{B} \wedge \vec{F} \end{cases}_G \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \|\vec{F}\|\cos\alpha\vec{x}_0 - \|\vec{F}\|\sin\alpha\vec{y}_0 \\ \vec{M}_G = -\|\vec{F}\|(l-x)\sin\alpha\vec{z}_0 \end{cases}_G$

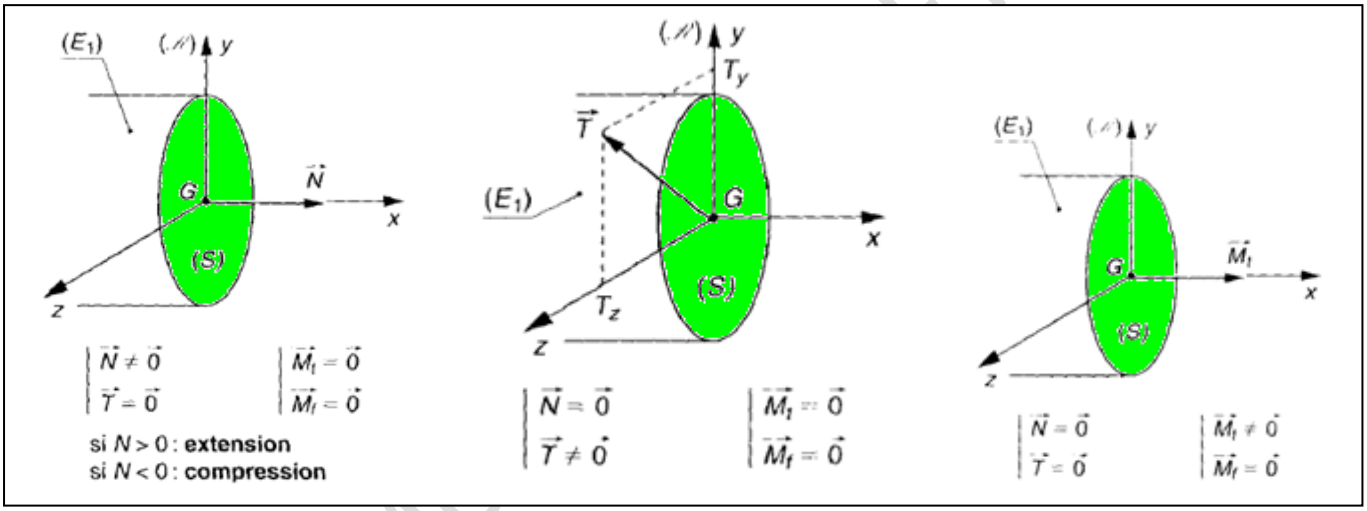
3°

$$\left| \begin{array}{l} N = \|\vec{F}\|\cos\alpha \\ T_y = -\|\vec{F}\|\sin\alpha \\ T_z = 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} M_t = 0 \\ M_{fy} = 0 \\ M_{fz} = -\|\vec{F}\|(l-x)\sin\alpha \end{array} \right.$$

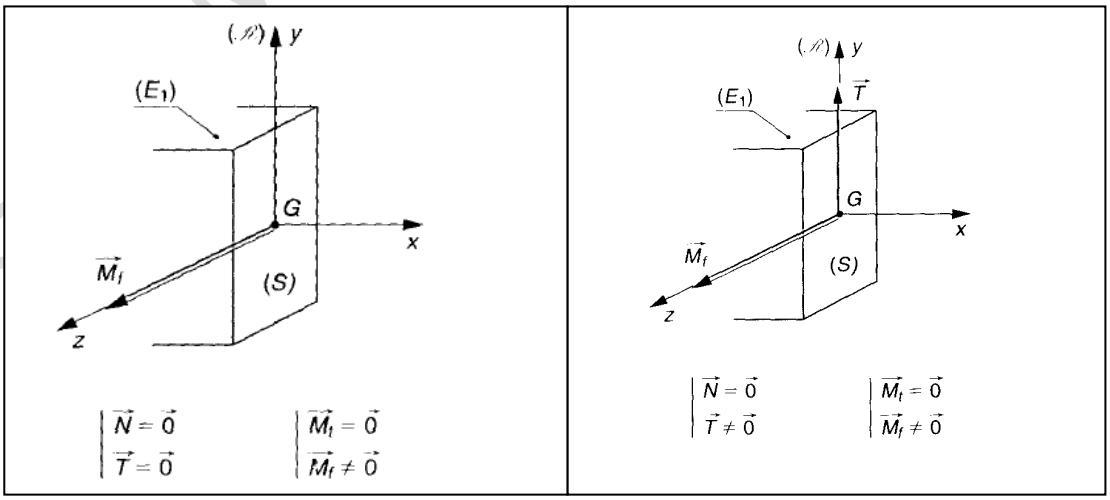
Genie Mécanique - ISET Siliana



Définition des sollicitations : Si les éléments de réduction en G du torseurs des efforts e cohésion font apparaître un seul des quatre éléments $\vec{N}, \vec{T}_y, \vec{M}_t, \vec{M}_f$ Non nul, la sollicitation est dite simple.



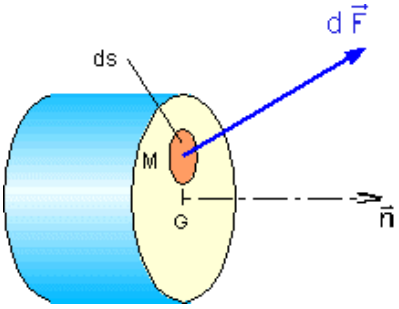
Définition de l'extension simple Définition du cisaillement simple Définition de)a torsion simple



Definition de la flexion simple Définition de la flexion étudiée

Vecteur contrainte en un point

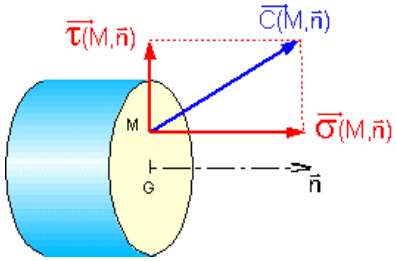
Les efforts de cohésion, sont les actions mécaniques que le tronçon (E_2) exerce sur le tronçon *(E_1)* a travers la section droite (S) de la coupure fictive. Ces actions mécaniques sont reparties en tons les points de (S) suivant une loi a priori inconnue. Notons $\Delta\vec{f}$ l'action mécanique au point M et ΔS l'élément de surface entourant ce point. Soit, $\vec{x}$ la normale issue de M au plan de la section (S), orientée vers l'extérieur de la matière du tronçon *(E_1)*.



Définition de la contrainte

On appelle vecteur contrainte au point M relativement a l'élément de surface ΔS oriente par sa normale extérieure, $\vec{x}$ le vecteur note $\vec{C}(M,\vec{x})$ tel que

$$\vec{C}(M,\vec{x}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{f}}{\Delta S} = \frac{d\vec{f}}{dS}$$



Unité :

$\left\|\vec{C}(M,\vec{x}\right\| = \left\|\frac{d\vec{f}}{ds}\right\|$ la dimension d'une contrainte est celle du rapport d'une force par une surface

Dans le système légal est le pascal : 1 Pa = 1N/m^2 mais l'unité usuelles en RDM est le megapascal (MPa). 1 MPa=10^{6}Pa, 1 MPa = 1N/mm^2 1MPa = 10bars.

Contrainte normale, contrainte tangentielle :

La contrainte et une grandeur vectorielle sa direction est généralement différente de celle de la normale extérieure $\vec{x}$ d'où la projection du vecteur contrainte sur deux directions.

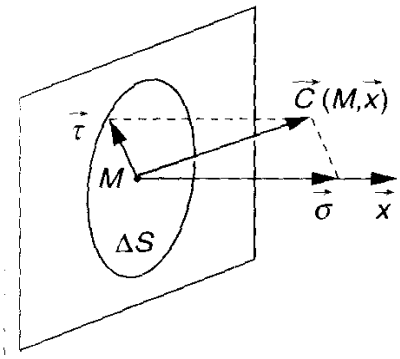
Genie Mécanique - ISET Siliana

Définition

On appelle contrainte normale $\vec{\sigma}$, la projection de $\vec{C}(M,\vec{x})$ sur la normale $\vec{x}$.

On appelle contrainte tangentielle $\vec{\tau}$ la projection de $\vec{C}(M,\vec{x})$ sur le plan de 1'element de surface ΔS.

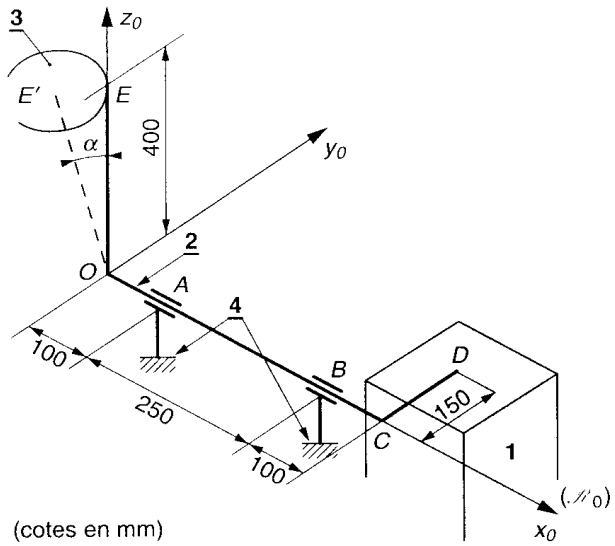
Donc $\vec{C}(M,\vec{x}) = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$



Eléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion :

$$\{\Im_{coh}\}_G = \begin{cases} \vec{R} = \sum_s \vec{C}(M,\vec{x})ds \\ \vec{M}_G = \sum_s \vec{GM} \wedge \vec{C}(M,\vec{x})ds \end{cases}$$

APPLICATION : **Dispositif d'ablocage**



1-Présentation

La figure suivante représente de façon partielle et schématique un dispositif d'ablocage de pièce sur chaîne de transfert. Ce système est essentiellement constitue par un arbre OC en liaison encastrement (soudure) avec deux leviers OE et CD. Cet ensemble est désigne par 2 et il est utilise pour réaliser l'ablocage de la pièce 1 en *D*.

2-Fonctionnement

Dans la position *OE'* du levier de manoeuvre, le levier *CD* est en contact avec la pièce 1 mais ne transmet aucun effort. Pour obtenir le serrage de la pièce 1 en *D*, une came 3, fait tourner le levier *OE* d'un angle α.

Hypothèses

•Le poids des pièces est néglige par rapport a 1'effort de serrage.

La liaison de l'arbre 2 avec le socle 4 est une liaison réalisée par deux paliers A et *B* coaxiaux. Comme aucun effort n'est transmis parallèlement à l'axe de 1'arbre les liaisons 2-4 en A et en *B* sont modélisées par des liaisons linéaires circulaires sans adhérence d'axe $(O,\vec{x})$.

• En position de serrage, le levier OE est porte par $(O,\vec{z}_0)$ et le levier CD est parallèle à $(O,\vec{y}_0)$. On considère que toutes les pièces sont parfaitement rigides, sauf l'arbre OC qui subit une déformation de torsion d'angle α.

• **La liaison 2-1** en *D* est une liaison ponctuelle sans adhérence de normale $(D,\vec{z}_0)$ et , une étude d'équilibre préliminaire de la pièce 1à permis de calculer l'effort de serrage : $\|\vec{D}(2\rightarrow 1)\| = 5400N$

La liaison 3-2 en E est une liaison ponctuelle sans adhérence de normale $(E,\vec{y}_0)$.

Etude du levier 2

Le but de cette étude est de déterminer la nature et l'importance des sollicitations dans le levier 2.

QUESTION 1 :

Analyser et modéliser les liaisons de 2 avec le milieu extérieur. Exprimer les actions mécaniques de liaison et calculer celles-ci.

Modélisation des liaisons :

Liaison 1-2 Ponctuelle de normale $(D,\vec{z}_0)$ telque dans $R_0 = (\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

$$\{\mathfrak{T}'(1\rightarrow 2\ )\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5400 & 0 \end{Bmatrix}$$

Liaison 3-2 Ponctuelle de normale $(E,\vec{y}_0)$.telque dans $R_0 = (\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

$$\{\mathfrak{T}'(3\rightarrow 2\ )\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \|\vec{E}(3\rightarrow 2)\| & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Liaison (L_1) 4-2 Linéaire annulaire d'axe $(A,\vec{x}_0)$:

$$\{\mathfrak{T}_1(4\rightarrow 2\ )\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_1(4\rightarrow 2) & 0 \\ Z_1(4\rightarrow 2) & 0 \end{Bmatrix}$$

Liaison (L_2) 4-2 Linéaire annulaire d'axe $(B,\vec{x}_0)$:

Genie Mécanique - ISET Siliana

$$\{\Im'_2(4\to 2\ )\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2(4\to 2) & 0 \\ Z_2(4\to 2) & 0 \end{Bmatrix}$$

Appliquons le principe fondamental de la statique à l'équilibre de 2 :

$$\{\Im'(1\to 2\ )\}+\{\Im'(3\to 2\ )\}+\{\Im_1(4\to 2\ )\}+\{\Im'_2(4\to 2\ )\}=\{\ \vec{0}\ \}$$

Effectuons tout d'abord la réduction de tous ces torseurs au meme point : A par exemple

On écrira : $\vec{M}_A(1\to 2)=\vec{M}_D(1\to 2)+\vec{AD}\wedge\vec{D}(1\to 2) avec \vec{M}_D(1\to 2)=\vec{0}$

Par conséquent $\{\Im'(1\to 2\ )\}=\begin{Bmatrix} 0 & 810 \\ 0 & -1890 \\ 5400 & 0 \end{Bmatrix}$

On écrira : $\vec{M}_A(3\to 2)=\vec{M}_E(3\to 2)+\overrightarrow{AE}\wedge\vec{E}(3\to 2)\ avec\ \vec{M}_E(3\to 2)=\vec{0}$

Par conséquent $\{\Im'(3\to 2\ )\}=\begin{Bmatrix} 0 & -0{,}4\|\vec{E}(3\to 2)\| \\ \|\vec{E}(3\to 2)\| & 0 \\ 0 & -0{,}1\|\vec{E}(3\to 2)\| \end{Bmatrix}$

Pour le torseur $\{\Im_1(4\to 2\ )\}$ en A : $\{\Im_1(4\to 2\ )\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_1(4\to 2) & 0 \\ Z_1(4\to 2) & 0 \end{Bmatrix}$

On écrira : $\vec{M}_A(4\to 2)=\vec{M}_B(4\to 2)+\overrightarrow{AB}\wedge\vec{B}(4\to 2)\ avec\ \vec{M}_B(4\to 2)=\vec{0}$

Par conséquent $\{\Im'_2(4\to 2\ )\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2(4\to 2) & -0{,}25Z_2(4\to 2) \\ Z_2(4\to 2) & 0{,}25Y_2(4\to 2) \end{Bmatrix}$

Les équations algébriques qui traduisent le principe fondamental appliqué à l'équilibre de 2

Genie Mécanique - ISET Siliana

$$\left\|\vec{E}(3\to 2)\right\| + Y_1(4\to 2) + Y_2(4\to 2) = 0$$

$$5400 + Z_1(4\to 2) + Z_2(4\to 2) = 0$$

s'écrivent : $810 - 0{,}4\left\|\vec{E}(3\to 2)\right\| = 0$

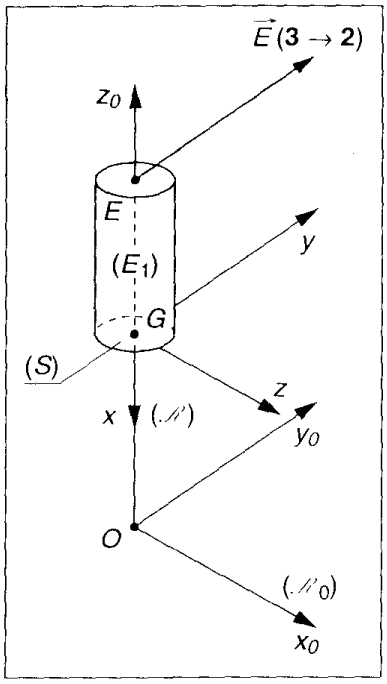
$$-1810 - 0{,}25 Z_2(4\to 2) = 0$$

$$-0{,}1\left\|\vec{E}(3\to 2)\right\| + 0{,}25 Y_2(4\to 2) = 0$$

Les résultats de ce système sont donnés au centre de chaque liaison :

$$\{\Im'(1\to 2\ )\} = {}_D\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5400 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} \quad ; \quad \{\Im'(3\to 2\ )\} = {}_E\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2025 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{X}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

$$\{\Im_1(4\to 2\ )\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -2835 & 0 \\ 2160 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$



Remarque préliminaire relative aux questions 2, **3, etc.**
La poutre 2 étudiée comporte trois parties, formant entre elles des angles de 90 degrés
- le bras *EO:*
- l'arbre OC;
- le bras *CD.*

Considérons une section droite fictive (S) de la poutre repérée par son centre de surface G. Déplaçons G depuis *E* jusqu'a D et désignons par (E_1) le tronçon de 2 situé d'un coté de (S). Pour fixer les idées, disons que le point *E* appartiendra *a(E_1).*
(E_2) désignera alors l'autre tronçon de 2.
Définissons un repère $R = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la section droite et tel que $(G, \vec{x})$ soit toujours la normale extérieure en G, à (S), relativement à*(E_i).*
Soit $\overline{2}$ le milieu extérieur à la poutre 2.
Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion que (E_2) exerce sur (E_1) à travers la section droite (S) s'expriment par :

$$\{\Im_{coh}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix} \text{ avec } {}_G\begin{cases} \vec{R} = -\vec{R}(\overline{E}\to E_1) \\ \vec{M}_G = -\vec{M}_G(\overline{E}\to E_1) \end{cases} \text{ Ou}$$

$$ {}_G\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}(\overline{E}\to E_1) \\ \vec{M}_G = \vec{M}_G(\overline{E}\to E_1) \end{cases}$$

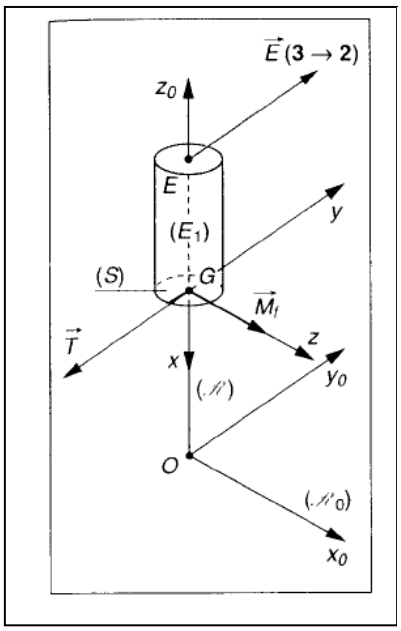
QUESTION 2

Etudier les sollicitations dans le bras OE

Considérons le repère $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Le point G est défini par :

$\vec{OG}=z\vec{z}_0$ avec $0\le z\le 0{,}4$ et que $\begin{cases}\vec{R}=-\vec{E}(3\to 2)\\ \vec{M}_G=-\vec{GE}\wedge\vec{E}(3\to 2)\end{cases}_G$

$\vec{E}(3\to 2)=2025\vec{y}_0$ et $\vec{GE}=\vec{OE}-\vec{OG}$ soit $\vec{GE}=(0{,}4-z)\vec{z}_0$.



En effectuant le produit vectoriel $\{-\vec{GE}\wedge\vec{E}(3\to 2)\}$.

$$\begin{cases}\vec{R}=-2025\vec{y}_0\\ \vec{M}_G=(-2025z+810)\vec{x}_0\end{cases}_G$$

Soit en exprimant $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ dans le repère $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ avec $\vec{x}_0=\vec{z}$; $\vec{y}_0=\vec{y}$; $\vec{z}_0=-\vec{x}$:

$$\begin{cases}\vec{R}=-2025\vec{y}\\ \vec{M}_G=(-2025z+810)\vec{z}\end{cases}_G$$

Ce résultat permet d'exprimer les composantes algébriques, N, T_y, T_z, , M_t, M_{fy}, et M_{fz} dans le repère de définition des sollicitations $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

N = 0	$M_t = 0$
T_y = -2025	$M_{fy} = 0$
T_z = 0	M_{fz} = -2025z + 810

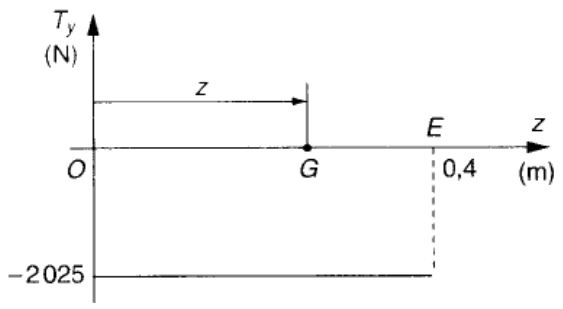
QUESTION 3

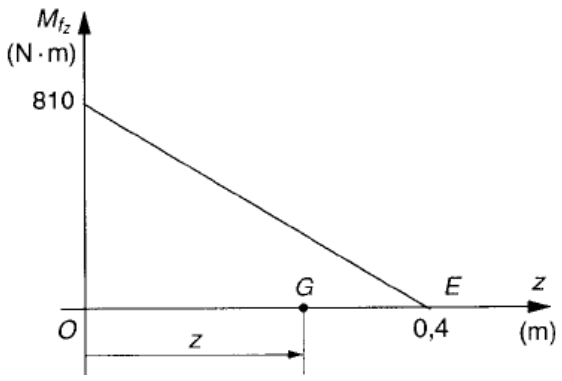
Construire les diagrammes représentant la variation des fonctions T_y, etM_{fz} le long du bras OE.

Les diagrammes des figures suivantes représentent les variations des fonctions Ty et Mfz en fonction de l'bscisse z du centre de surface G de S

T_y (z) = -2025 (N)

M_{fz} (z) = -2025z + 810 (Nm)



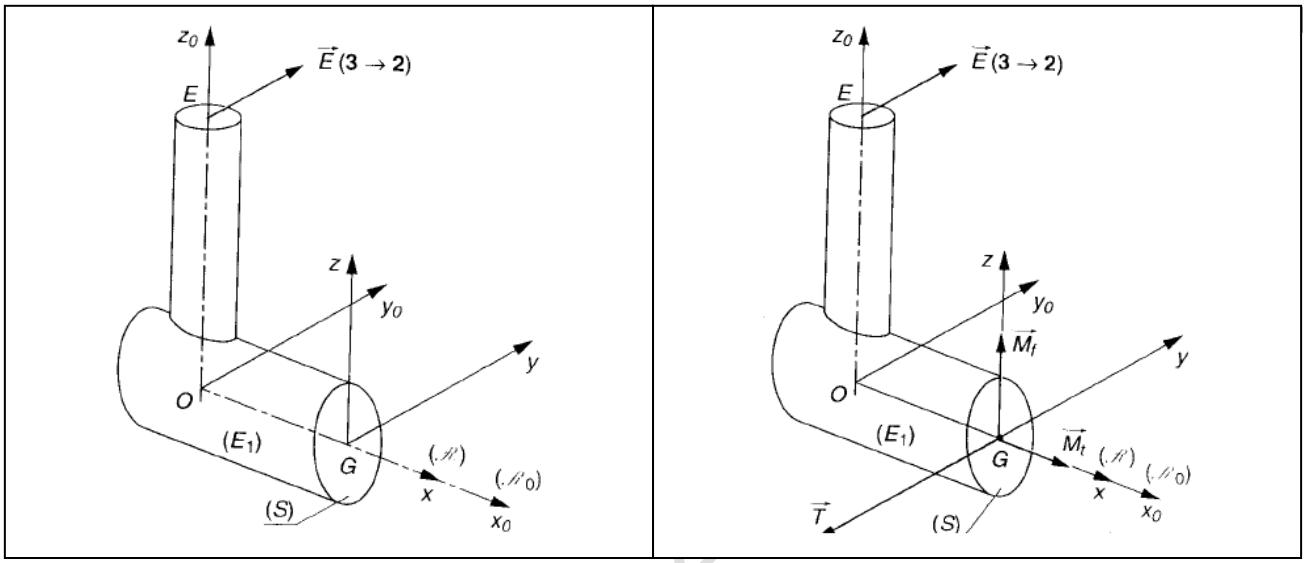


QUESTION 4

Etudier les sollicitations dans le l'arbre OC.

Notons que cet arbre se divise en trois zone d'étude : OA, AB, BC.

Soit G le centre d'une section droite fictive (S) et $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ le repère lié à la section telque $(G,\vec{x})$ soit la normale extérieure.



Le point G est alors défini par $\overrightarrow{OG}=x\vec{x}_0$.

Les éléments de réduction en G du torseur des cohésions que (E_2) exerce sur (E_1)à travers la section droite (S) s'expriment par : $\{\Im_{coh}\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \vec{M}_G\end{Bmatrix}$

Pour la zone OA : $0\le x\le 0{,}1$

$$\begin{cases}\vec{R}=-\vec{E}(3\to 2)\\ \vec{M}_G=-\vec{GE}\wedge\vec{E}(3\to 2)\end{cases}_G$$

En exprimnt les résultats dans R_0

$\vec{E}(3\to 2)=2025\vec{y}_0$ et $\vec{GE}=\vec{OE}-\vec{OG}$ soit $\vec{GE}=0{,}4\vec{z}_0-x\vec{x}_0$.

En effectuant le produit vectoriel $\{-\vec{GE}\wedge\vec{E}(3\to 2)\}$.

$$\begin{cases}\vec{R}=-2025\vec{y}_0\\ \vec{M}_G=(2025x\vec{z}_0+810\vec{x}_0\end{cases}_G$$

exprimons $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ dans le repère $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ avec

$\vec{x}_0=\vec{x}$; $\vec{y}_0=\vec{y}$; $\vec{z}_0=\vec{z}$:

Genie Mecanique

$$_G\begin{cases}\vec{R} = -2025\vec{y}\\ \vec{M}_G = 2025x\vec{z} + 810\vec{x}\end{cases}$$

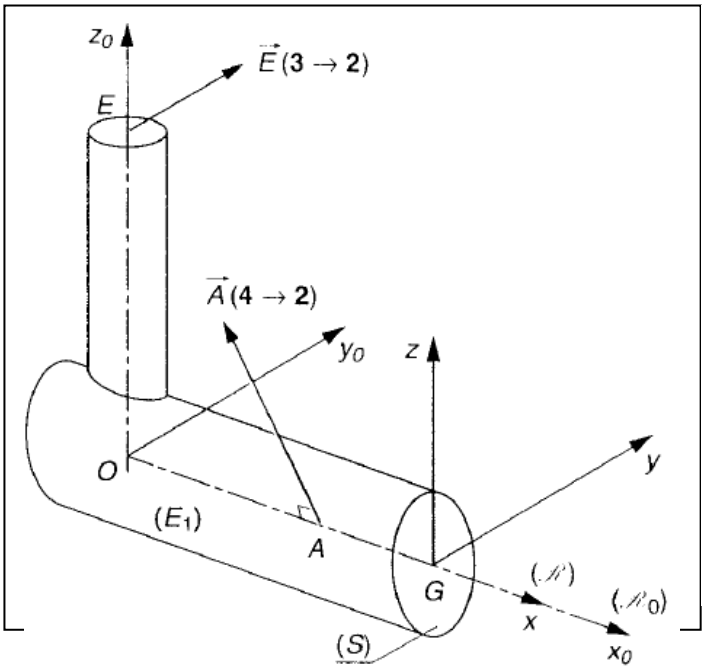
Par conséquent

N = 0 $M_t = 810$

$T_y = -2025$ $M_{fy} = 0$

$T_z = 0$ $M_{fz} = 2025$

Pour la zone AB $0{,}1 \le x < 0{,}35$



$$\begin{cases}\vec{R} = -\left[\vec{E}(3 \to 2) + \vec{A}(4 \to 2)\right]\\ \vec{M}_G = -\left[G\vec{E} \wedge \vec{E}(3 \to 2) = G\vec{A} \wedge \vec{A}(4 \to 2)\right]\end{cases}$$

En exprimnt les résultats dans R_0

$\vec{E}(3 \to 2) = 2025\vec{y}_0$; $\vec{A} = -2835\vec{y}_0 + 2160\vec{z}_0$

$G\vec{E} = O\vec{E} - O\vec{G}$ soit $G\vec{E} = 0{,}4\vec{z}_0 - x\vec{x}_0$.

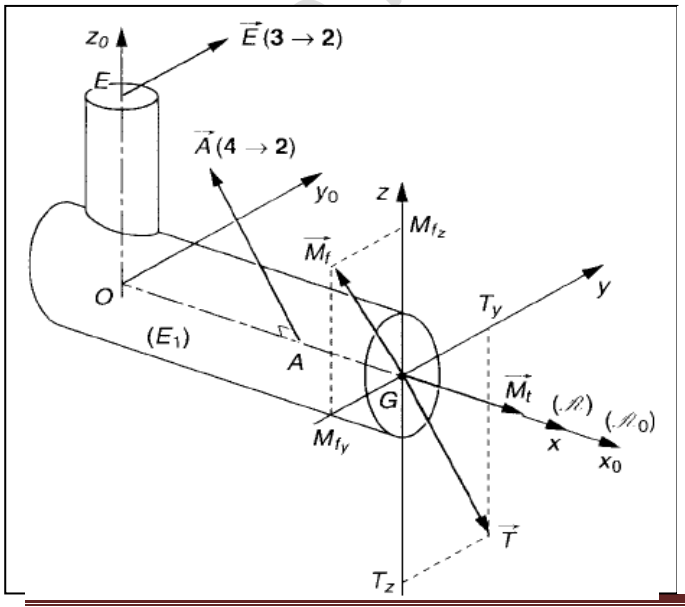
$G\vec{A} = O\vec{A} - O\vec{G}$ soit $G\vec{A} = (0{,}1 - x)\vec{x}_0$

En effectuant les produits vectoriels :

$$_G\begin{cases}\vec{R} = 810\vec{y}_0 - 2160\vec{z}_0\\ \vec{M}_G = 810\vec{x}_0 + (216 - 2160x)\vec{y}_0 + (283{,}5 - 810x)\vec{z}_0\end{cases}$$

En exprimant $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ dans $(\mathscr{R}) = (\mathscr{R}_0)$

$$_G\begin{cases}\vec{R} = 810\vec{y} - 2160\vec{z}\\ \vec{M}_G = 810\vec{x} + (216 - 2160x)\vec{y} + (283{,}5 - 810x)\vec{z}\end{cases}$$



Par conséquent :

N = 0 $M_t = 810$

$T_y = 810$ $M_{fy} = -2160x+216$

$T_z = -2160$ $M_{fz} = -810x+283{,}5$

Pour la zone BC $0{,}35 \leq x < 0{,}45$

En utilisant $\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}(\overline{E} \rightarrow E_1) \\ \vec{M}_G = \vec{M}_G(\overline{E} \rightarrow E_1) \end{cases}_G$ donc $\begin{cases} \vec{R} = \vec{D}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_G = G\vec{D} \wedge \vec{D}(1 \rightarrow 2) \end{cases}_G$

En expriment les résultat dans $\Re_0$

$\vec{D}(1 \rightarrow 2) = 5400\vec{z}_0$

$G\vec{D} = O\vec{D} - O\vec{G}$

$G\vec{D} = (0{,}45 - x)\vec{x}_0 + 0{,}15\vec{y}_0$

En effectuant le produit vectoriel :

$$\begin{cases} \vec{R} = 5400\vec{z}_0 \\ \vec{M}_G = 810\vec{x}_0 + (5400x - 2430)\vec{y}_0 \end{cases}_G$$

En exprimant $\vec{R}$ et $\vec{M}_G$ dans (R) = (R_0)

$$\begin{cases} \vec{R} = 5400\vec{z} \\ \vec{M}_G = 810\vec{x} + (5400x - 2430)\vec{y} \end{cases}_G$$

Par conséquent

N = 0	Mt = 810
T_y =0	M_{fy} = 5400x - 2430
T_z = 5400	M_{fz} = 0

QUESTION 5

Construire les diagrammes représentant la variation des fonctions *N, T_y,T_z, M_t, M_{fy} et M_{fz}* le long de l'arbre *OC*.

- L'effort normal est toujours nul le long de OC.

- La figure 1-1 représente la variation de la composante de 1'effort tranchant $\vec{T}$ suivant l'axe $(G, \vec{y}) : Ty = Ty(x)$

- La figure 1-2 représente la variation de la cornposante de 1'effort tranchant $\vec{T}$ suivant l'axe $(G, \vec{z}) : Tz = Tz(x)$

- La figure 1-3 représente la variation de la composante sur $(G, \vec{x})$ du moment de torsion $\vec{M}_t : M_t = M_t(x)$.

- La figure 1-4 représente la variation de la composante sur $(G, \vec{y})$ du moment de flexion

Genie Mecanique - ISET Siliana

$\vec{M}_f : M_{fy} = M_{fy}(x).$

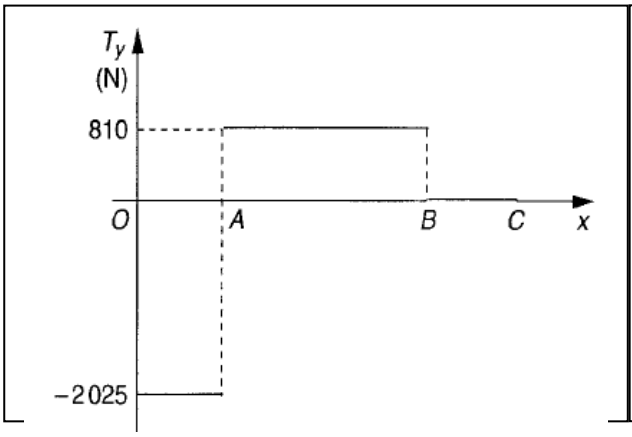


Fig 1-1

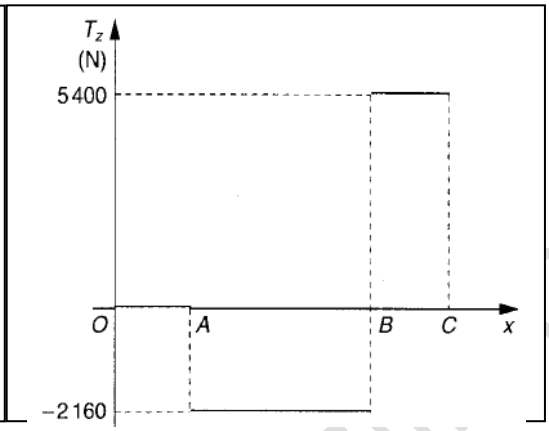


Fig : 1-2

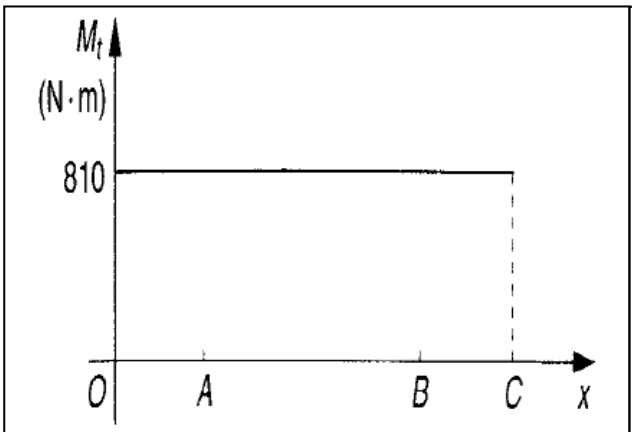


Fig : 1-3

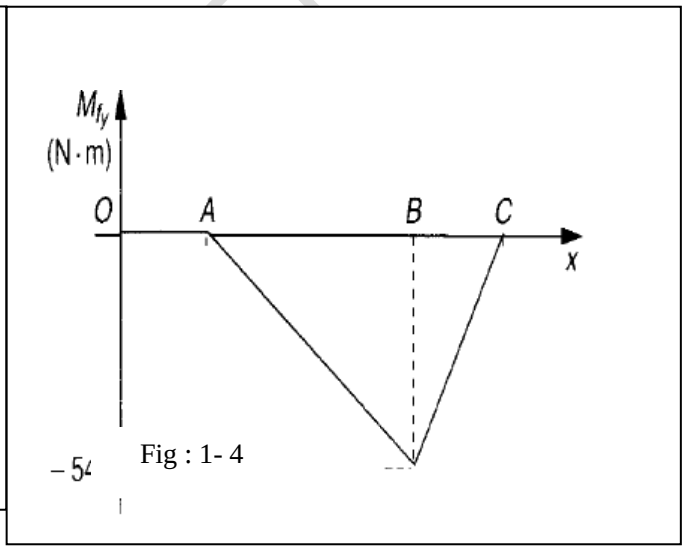


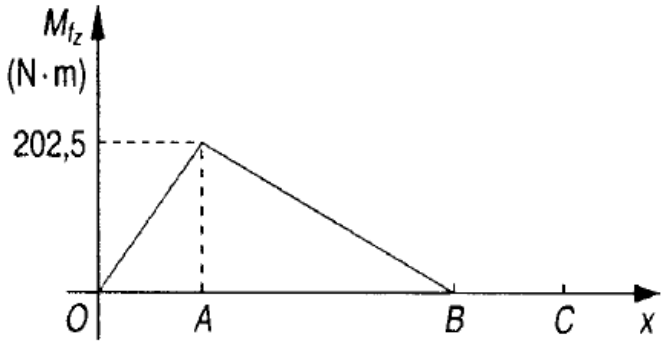
Fig : 1- 4

QUESTION 2

Etudier les sollicitations dans le bras CD.

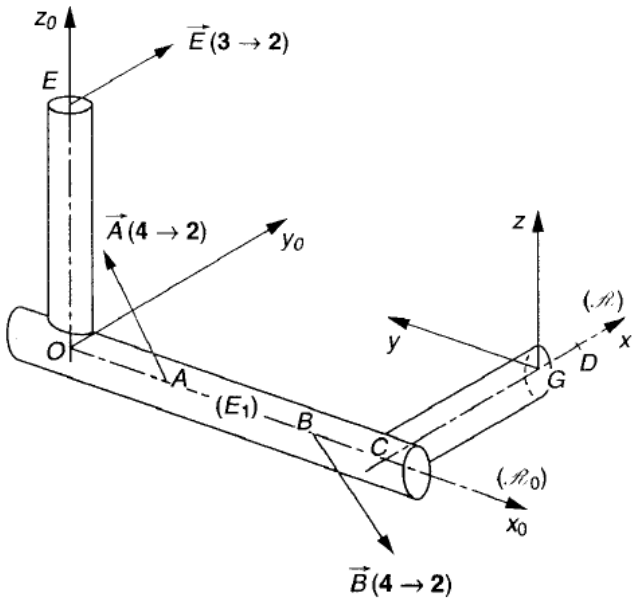
- La figure 1- 5 représente la variation de la composante sur $(G,\vec{z})$ du moment de flexion

$\vec{M}_f : Mfz = Mfz(x).$



QUESTION 6

Etudier les sollicitations dans le bras CD



Le centre de surface G de la section droite fictive (S) du bras CD est repéré par :

$\vec{OG} = 0{,}45\vec{x}_0 + \vec{y}y_0$ avec $0 \leq y \prec 0{,}15$

La résolution de cette question ne présente pas de nouvelle difficulté ; et les résultats sont les suivants :

$N = 0$	$M_t = 810$
$T_y = 0$	$M_{fy} = 5400y - 810$
$T_z = 5400$	$M_{fz} = 0$

QUESTION 7

Construire les diagrammes représentant la variation des fonctions Tz, et M_{fy} le long du bras CD

- La figure 1- 6 représente la variation de la cornposante de 1'effort tranchant $\vec{T}$ suivant

l'axe $(G,\vec{z}) : Tz = Tz(y)$

- La figure 1-7 représente la variation de la composante sur $(G,\vec{y})$ du moment de flexion

$\vec{M}_f : M_{fy} = M_{fy}(y).$

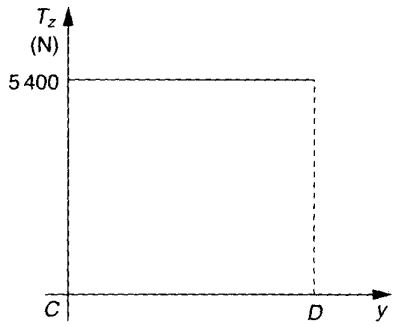


Fig : 1-6

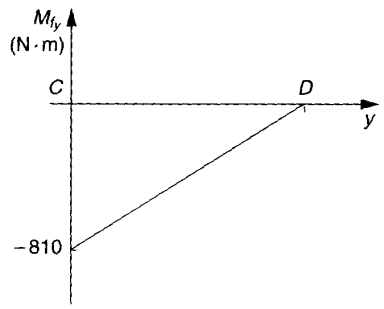
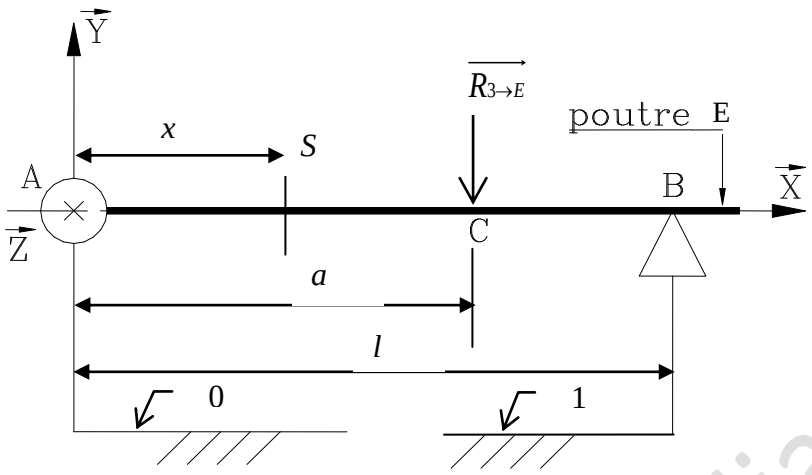


Fig 1-7

Exercice 1



Soit une poutre cylindrique, de 200 mm de long et de 5 mm de diamètre, soumise à une action mécanique modélisable par un glisseur avec $\overrightarrow{R_{3\to E}}$ d'intensité 100 daN.

$\overrightarrow{AC}=a.\vec{x}\,;\,a=150\text{ mm}$

$\overrightarrow{AB}=l.\vec{x}\,;\,l=200\text{ mm}$

L'étude s'effectuera dans la plan de symétrie $(\vec{x},\vec{y})$

Détermination des actions en A et B

Isolement de la poutre (E)

(E) est soumis à 3 actions mécaniques : $\{T_{0\to E}\},\{T_{1\to E}\},\{T_{3\to E}\}$

$$\{T_{0\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{0\to E}}\\ \overrightarrow{M_{A0\to E}}\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}X_{0\to E} & 0\\ Y_{0\to E} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\qquad \{T_{1\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to E}}\\ \overrightarrow{M_{B1\to E}}\end{matrix}\right\}_B=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{1\to E} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{3\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{3\to E}}\\ \overrightarrow{M_{C3\to E}}\end{matrix}\right\}_C=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -100 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ecriture des torseurs au point A

$$\{T_{0\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{0\to E}}\\ \overrightarrow{M_{A0\to E}}\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}X_{0\to E} & 0\\ Y_{0\to E} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\qquad \{T_{1\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to E}}\\ \overrightarrow{M_{A1\to E}}\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{1\to E} & 0\\ 0 & l.Y_{1\to E}\end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{3\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{3\to E}}\\ \overrightarrow{M_{A3\to E}}\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -100 & 0\\ 0 & -a.100\end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Genie Mécanique - ISET Siliana

Ecriture du PFS appliqué à (E)

$$\{T_{\bar{E}\to E}\}=\left\{\begin{matrix} X_{0\to E} & 0 \\ Y_{0\to E}+Y_{1\to E}-100 & 0 \\ 0 & l.Y_{1\to E}-a.100 \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\{0\}$$

Equations Résolution

$$X_{0\to E}=0 \qquad Y_{1\to E}=\frac{a.100}{l}=\frac{15000}{200}=75 \qquad Y_{0\to E}=-Y_{1\to E}+100=-75+100=25$$

Conclusion

$$\{T_{0\to E}\}=\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{0\to E}} \\ \overrightarrow{M_{A0\to E}} \end{matrix}\right\}_{A}=\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \{T_{1\to E}\}=\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{1\to E}} \\ \overrightarrow{M_{B1\to E}} \end{matrix}\right\}_{B}=\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 75 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{3\to E}\}=\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{3\to E}} \\ \overrightarrow{M_{C3\to E}} \end{matrix}\right\}_{C}=\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -100 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Détermination du torseur de cohésion

Il faut étudier chaque portion de poutre comprise entre deux charges.

$0<x<c$

Équilibre de E1

$$_G\{T_{coh}\}=\left\{\begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M_G} \end{matrix}\right\}_{G}=\left\{\begin{matrix} -\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E1}} \\ -\overrightarrow{M_{G\bar{E}\to E1}} \end{matrix}\right\}_{G}=-\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{0\to E}} \\ \overrightarrow{M_{G0\to E}} \end{matrix}\right\}_{G}=-\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 25 & 0 \\ 0 & -25.x \end{matrix}\right\}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -25 & 0 \\ 0 & 25.x \end{matrix}\right\}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

avec $\overrightarrow{M_{G0\to E}}=\overrightarrow{M_{A0\to E}}+\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{R_{0\to E}}=0+\begin{vmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -25.x \end{vmatrix}$

$c<x<b$

Équilibre de E2 $_G\{T_{coh}\}=\left\{\begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M_G} \end{matrix}\right\}_{G}=\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{\bar{E}\to E2}} \\ \overrightarrow{M_{G\bar{E}\to E2}} \end{matrix}\right\}_{G}=\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{1\to E}} \\ \overrightarrow{M_{G1\to E}} \end{matrix}\right\}_{G}=\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 75 & 0 \\ 0 & 75.(l-x) \end{matrix}\right\}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

avec $\overrightarrow{M_{G1\to E}}=\overrightarrow{M_{B1\to E}}+\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{R_{1\to E}}=0+\begin{vmatrix} l-x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix} 0 \\ 75 \\ 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 75.(l-x) \end{vmatrix}$

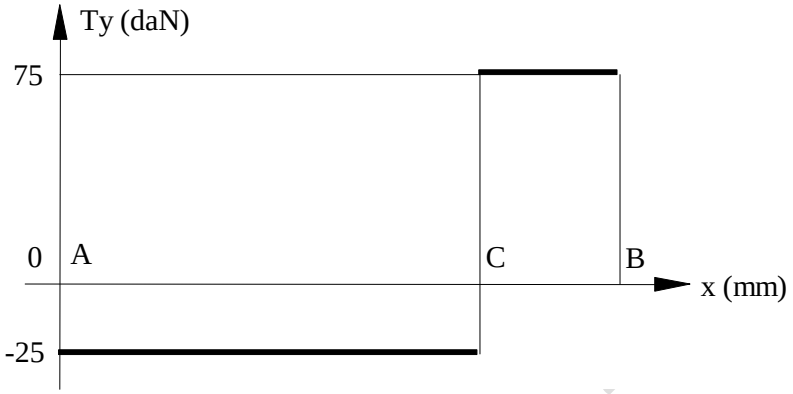
Courbes des efforts intérieurs

On représente la variation des efforts intérieurs à l'aide de courbes qui visualisent immédiatement les zones dangereuses de la poutre.

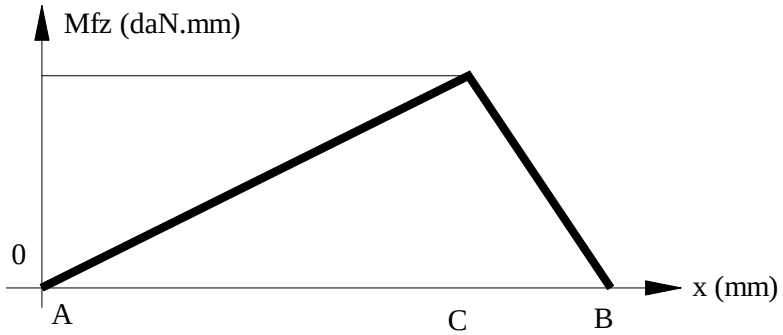
Genie Mécanique - ISET Siliana

Sollicitation	A<x<C	C<x<B
N	*0*	*0*
Ty	*-25*	*75*
Tz	*0*	*0*
Mt	*0*	*0*
Mfy	*0*	*0*
Mfz	*25.x*	*75(l-x)*

Effort tranchant



Moment de flexion



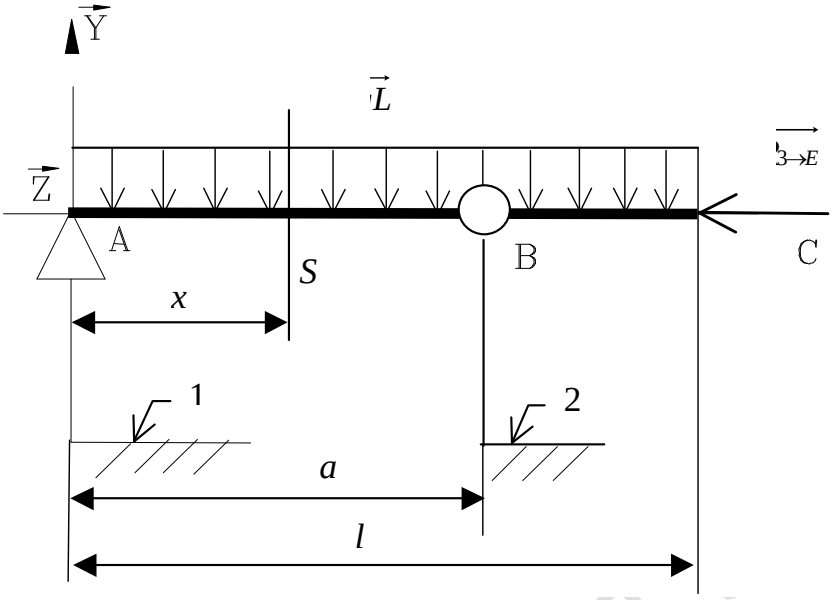
Conclusion :

Le torseur de cohésion est variable le long de la poutre

Calculer la pente de Mf sur chaque partie de la courbe : tan 1=25 et tan 2=-75

Existe-t-il un rapport entre la pente de la courbe et l'effort tranchant : oui $T_y = -\frac{dM_{fz}}{dx}$

Exercice 2



Soit une poutre de 3 m de long soumise à 2 actions mécaniques modélisable par :

- une charge concentrée $\overrightarrow{R_{3\to E}}$
- une charge répartie $\overrightarrow{qL}$

Données

a = 2 m ; l = 3 m

$\overrightarrow{R_{3\to E}} = -1200.\vec{x}$ (N)

$\overrightarrow{qL} = -900.\vec{y}$ (N/m)

La charge répartie sera ramenée à une charge concentrée au point m centre de la répartition

L'étude s'effectuera dans la plan de symétrie $(\vec{x},\vec{y})$

Détermination des actions en A et B

Isolement de la poutre (E)

(E) est soumis à 4 actions mécaniques : $\{T_{1\to E}\};\{T_{2\to E}\};\{T_{3\to E}\}\{Tchr\}$

$$\{T_{1\to E}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1\to E}} \\ \overrightarrow{M_{A1\to E}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1\to E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \{T_{2\to E}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to E}} \\ \overrightarrow{M_{B2\to E}} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{2\to E} & 0 \\ Y_{2\to E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{3\to E}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3\to E}} \\ \overrightarrow{M_{C3\to E}} \end{Bmatrix} = {}_C\begin{Bmatrix} -1200 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Genie Mécanique - ISET Gafsa

$$\{T_{chr}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{rch}}\\ \overrightarrow{M_{mrch}}\end{matrix}\right\}_m=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -qL.l & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{m\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -2700 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{m\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ecriture des torseurs au point B

$$\{T_{1\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to E}}\\ \overrightarrow{M_{B1\to E}}\end{matrix}\right\}_B=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{1\to E} & 0\\ 0 & -a.Y_{1\to E}\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{1\to E} & 0\\ 0 & -2.Y_{1\to E}\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{2\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{2\to E}}\\ \overrightarrow{M_{B2\to E}}\end{matrix}\right\}_B=\left\{\begin{matrix}X_{2\to E} & 0\\ Y_{2\to E} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{3\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{3\to E}}\\ \overrightarrow{M_{B3\to E}}\end{matrix}\right\}_B=\left\{\begin{matrix}-1200 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{chr}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{chr}}\\ \overrightarrow{M_{Bchr}}\end{matrix}\right\}_B=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -2700 & 0\\ 0 & 1350\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ avec m situe au milieu de AC

Ecriture du PFS appliqué à (E)

$$\{T_{\bar{E}\to E}\}=\left\{\begin{matrix}X_{2\to E}-1200 & 0\\ Y_{1\to E}+Y_{2\to E}-2700 & 0\\ 0 & -2.Y_{1\to E}+1350\end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\{0\}$$

Equations Résolution

$X_{2\to E}=1200$ $\qquad Y_{1\to E}=\frac{1350}{2}=675$ $\qquad Y_{2\to E}=-Y_{1\to E}+2700=-675+2700=2025$

Conclusion

$$\{T_{1\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to E}}\\ \overrightarrow{M_{A1\to E}}\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 675 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\qquad \{T_{2\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{2\to E}}\\ \overrightarrow{M_{B2\to E}}\end{matrix}\right\}_B=\left\{\begin{matrix}1200 & 0\\ 2025 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{3\to E}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{3\to E}}\\ \overrightarrow{M_{C3\to E}}\end{matrix}\right\}_C=\left\{\begin{matrix}-1200 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{chr}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{rch}}\\ \overrightarrow{M_{mrch}}\end{matrix}\right\}_m=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -qL.l & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{m\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -2700 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{m\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Détermination des torseurs de cohésion

Genie Mécanique - ISET Siliana

Il faut étudier chaque portion de poutre comprise entre deux charges.

$A<x<B$

Équilibre de E1 $\quad {}_G\{T_{coh}\}=-{}_G\{T_{\bar{E}\to E1}\}=-({}_G\{T_{1\to E}\}+{}_G\{T_{chr}\})$

$$\{T_{1\to E}\}={}_G\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to E}}\\ \overrightarrow{M_{G1\to E}}\end{matrix}\right\}={}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 675 & 0\\ 0 & -675.x\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{M_{G1\to E}}=\overrightarrow{M_{A1\to E}}+\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{R_{1\to E}}=0+\begin{vmatrix}-x\\0\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\675\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\-675.x\end{vmatrix}$$

$$\{T_{chr}\}={}_G\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{rch}}\\ \overrightarrow{M_{Grch}}\end{matrix}\right\}={}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -qL.x & 0\\ 0 & \dfrac{qL.x^2}{2}\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}={}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -900.x & 0\\ 0 & 450.x^2\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec}$$

$$\overrightarrow{M_{Gchr}}=0+\begin{vmatrix}-\dfrac{x}{2}\\0\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\-900.x\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\\dfrac{900.x^2}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\450.x^2\end{vmatrix}$$

$$\{T_{\bar{E}\to E1}\}={}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 675 & 0\\ 0 & -675.x\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}+{}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -900.x & 0\\ 0 & 450.x^2\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}={}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 675-900.x & 0\\ 0 & -675.x+450.x^2\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{coh}\}=-\{T_{\bar{E}\to E1}\}={}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -675+900.x & 0\\ 0 & 675.x-450.x^2\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$B<x<C$

Équilibre de E2 $\quad {}_G\{T_{coh}\}=-{}_G\{T_{\bar{E}\to E2}\}={}_G\{T_{3\to E}\}+{}_G\{T_{chr}\}$

$$\{T_{3\to E}\}={}_G\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{3\to E}}\\ \overrightarrow{M_{G3\to E}}\end{matrix}\right\}={}_G\left\{\begin{matrix}-1200 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{M_{G3\to E}}=\overrightarrow{M_{C1\to E}}+\overrightarrow{GC}\wedge\overrightarrow{R_{3\to E}}=0+\begin{vmatrix}l-x\\0\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}-1200\\0\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$$

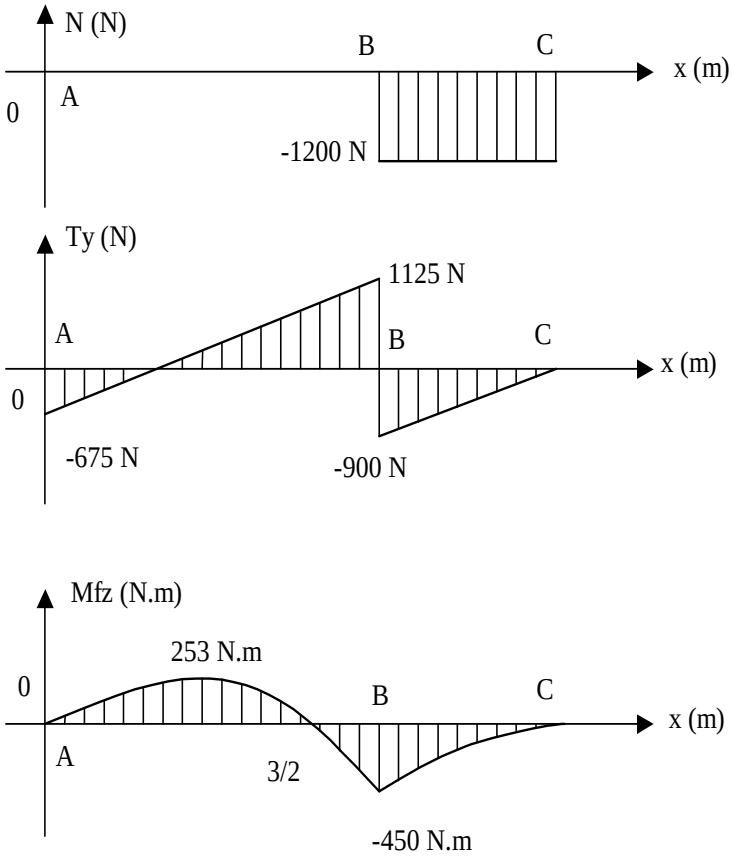
$$\{T_{chr}\}={}_G\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{rch}}\\ \overrightarrow{M_{Grch}}\end{matrix}\right\}={}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -qL.(l-x) & 0\\ 0 & (\dfrac{l-x}{2}).(-qL.(l-x))\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}={}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -900.(3-x) & 0\\ 0 & -450(3-x)^2\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec}$$

$$\overrightarrow{M_{Gchr}}=0+\begin{vmatrix}\dfrac{l-x}{2}\\0\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\-qL.(l-x)\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\\dfrac{l-x}{2}.-qL(l-x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\\dfrac{(l-x)(-qL)(l-x)}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\\dfrac{-qL(l-x)^2}{2}\end{vmatrix}$$

$$\{T_{coh}\}=\{T_{\bar{E}\to E2}\}={}_G\left\{\begin{matrix}-1200 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}+{}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 900.(x-3) & 0\\ 0 & 450.(x-3)^2\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}={}_G\left\{\begin{matrix}-1200 & 0\\ 900.(x-3) & 0\\ 0 & 450.(x-3)^2\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Genie Mecanique - ISET Siliana

Courbes des efforts intérieurs



Sollicitation	A<x<B	B<x<C
N	*0*	*-1200*
Ty	*-675+900.x*	*900(x-3)*
Tz	*0*	*0*
Mt	*0*	*0*
Mfy	*0*	*0*
Mfz	$675.x-450.x^2$	$450(x-3)^2$

Rappel :

$y=f(x)=-450.x^2+675.x$

$\Delta=b^2-4ac=675^2$

$x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-675-675}{-900}=\frac{3}{2}$

$x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-675+675}{-900}=0$

y=f(x) s'annule pour x=0 et x=1.5

$y'=-900.x+675$

pour y'=0, $x=\frac{3}{4}$

$f(\frac{3}{4})=-450.(\frac{3}{4})^2+675.(\frac{3}{4})=253,125$

=extremum de f(x)

Genie Méca