

## Chapitre III:

# Algebre De Boole Et Portes Logiques

### Introduction:

#### ☞ *Historique:*

- L'algèbre binaire résulte des travaux du mathématicien Georges BOOLE qui a développé au 19<sup>ème</sup> siècle une algèbre logique portant sur des variables qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini d'états.
- Son application, limitée aux variables et fonctions à caractère binaire, est attribuée à Claude SHANNON (travaux publiés en 1938).

#### ☞ *Définition:*

L'algèbre de Boole est l'outil mathématique qui permet d'établir la relation entre les sorties et les entrées d'un système logique (synthèse du système). Réciproquement, cet outil nous permet de déterminer les règles de fonctionnement d'un système logique existant (analyse du système).

\* Les opérateurs élémentaires de l'algèbre sont matérialisés par des systèmes physiques: optiques, pneumatiques ou électriques. En technologie électronique:

- les variables logiques sont généralement des signaux « bi-tension »,
  - les opérateurs logiques sont des circuits électroniques appelés « portes logiques ».

### I- Variables et fonctions logiques:

#### *1/ Variables logiques:*

Une variable ne peut prendre que 2 valeurs notées 0 et 1, qui représentent l'état d'un système bistable générateur de la variable physique.

Exemple : - Présence ou absence de la lumière pour un système d'éclairage public.

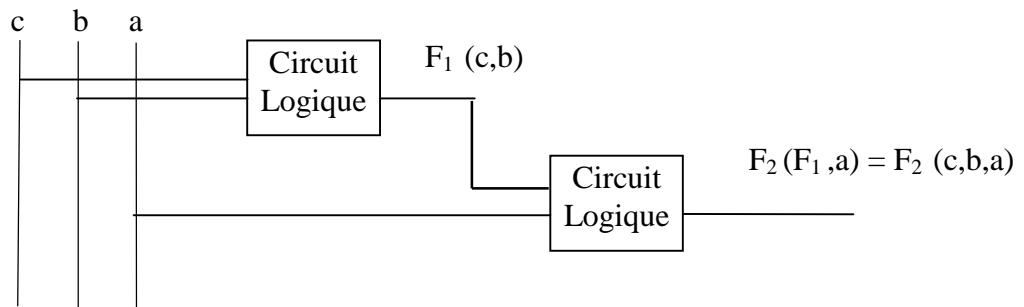
- Ouverture ou fermeture d'un interrupteur...

#### *2/ Fonctions logiques:*

- Le fonctionnement d'un système logique est décrit par une ou plusieurs *propositions logiques* simples qui présentent le caractère binaire « VRAI » ou « FAUX ».

- La relation *sorties-entrées* appelée fonction de transfert du système est décrite par une ou plusieurs fonctions logiques qui traduisent algébriquement les propositions logiques.
- Une fonction logique qui prend les valeurs 0 ou 1 peut être considérée comme une variable binaire pour une autre fonction logique.

☞ Exemple:



- Pour décrire le fonctionnement d'un système en cherchant l'état que doit prendre la sortie pour toutes les combinaisons possibles des entrées, on utilisera ce qu'on appelle « la table de vérité ».

## II- Les opérations fondamentales de l'algèbre de Boole et les propriétés associées:

Opération logique	Addition		Multiplication		Inversion	
Opérateur logique	OU		ET		NON	
Table de vérité	<u>A B</u>	<u>A OU B</u>	<u>A B</u>	<u>A ET B</u>	<u>A</u>	<u>NON A</u>
	0 0	0	0 0	0	0	1
	0 1	1	0 1	0	1	0
	1 0	1	1 0	0		
	1 1	1	1 1	1		
Notation algébrique	A OU B = A+B		A ET B = A.B		NON A = $\bar{A}$	

☞ Postulats:

- Sur une seule variable:

Opérateur OU	Opérateur ET
$A+A = A$	$A.A = A$
$A+1 = 1$	$A.1 = A$
$A+0 = A$	$A.0 = 0$
$A+\bar{A} = 1$	$A.\bar{A} = 0$
Elément neutre = 0	Elément neutre = 1

- Sur plusieurs variables:

Commutativité	:	$A+B = B+A$	
		$A.B = B.A$	
Associativité	:	$(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$	
		$(A.B).C = A.(B.C) = A.B.C$	
Distributivité	:	$A.(B+C) = A.B+A.C$	
		$A+B.C = (A+B).(A+C)$	

### ☞ Théorèmes:

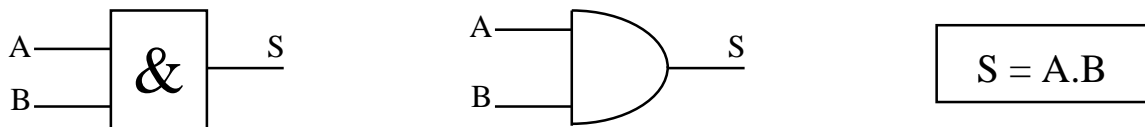
- De MORGAN	:	$\overline{A+B} = \overline{A} . \overline{B}$
		$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$
- Divers	:	$A+A.B = A$
		$A + \overline{A} . B = A+B$
		$A.( \overline{A} + B) = A.B$
		$A.B + \overline{A} . C + B.C = A.B + \overline{A} . C$

## III- Matérialisation des opérateurs logiques:

### 2/ Les portes logiques:

Les portes logiques sont des circuits électroniques dont les fonctions de transfert (relation entre les entrées et les sorties) matérialisent les opérations de base appliquées à des variables électriques.

a- La porte « ET »:

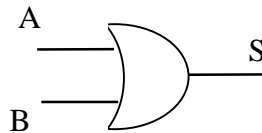
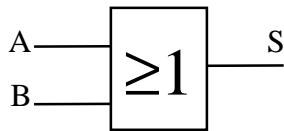


Si  $V_0$  représente le niveau BAS de tension (état 0) et  $V_1$  le niveau HAUT de tension (état1), on relève en sortie du circuit les tensions données dans la table de fonctionnement et on en déduit la table de vérité.

Table de fonctionnement		
VA	VB	VS
V0	V0	V0
V0	V1	V0
V1	V0	V0
V1	V1	V1

Table de vérité		
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

b- La porte « OU »:



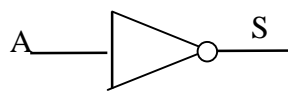
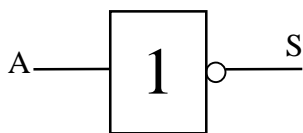
$$S = A + B$$

Table de fonctionnement		
VA	VB	VS
V0	V0	V0
V0	V1	V1
V1	V0	V1
V1	V1	V1

Table de vérité		
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Remarque: des portes logiques OU et ET à 2,3,4,8 et 13 entrées sont disponibles sous forme de circuits intégrés. (74LS32 et 74LS08)

c- La porte « NON »: 74LS04



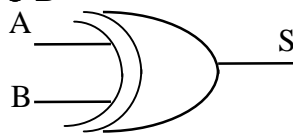
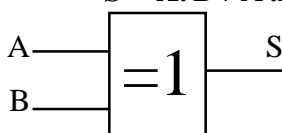
$$S = \bar{A}$$

Table de vérité	
A	S
0	1
1	0

d- La porte « OU EXCLUSIF »:74LS86

Proposition logique: (Sortie = 1) si une seule des 2 variables d'entrées est à l'état 1.

$$S = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B = A \oplus B$$

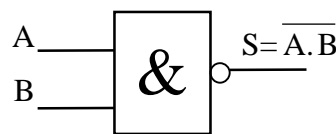


$$S = A \oplus B$$

Table de vérité	
AB	S
00	0
01	1
10	1
11	0

e- La porte « NAND »: (Non Et) 74LS00

$$S = \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$



⇔

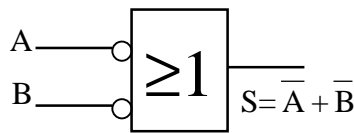
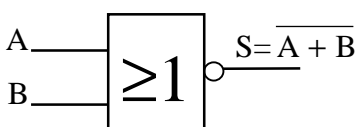


Table de vérité	
AB	S
00	1
01	1
10	1
11	0

f- La porte « NOR »: (Non Ou) 74LS02

$$S = \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$



⇔

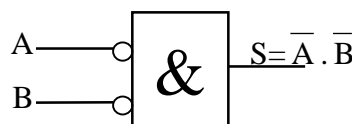


Table de vérité	
AB	S
00	1
01	0
10	0
11	0

